# Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 13 Nichttechnik - A II - Lösung**

**Teilaufgabe 1.0**

Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion **f** mit $f(x) := \dfrac{x^3 + 3 \cdot x^2}{2 \cdot (x+2)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq IR$. Ihr Graph ist $G_f$.

**Teilaufgabe 1.1** **(5 BE)**

Geben Sie $D_f$ und die Art der Definitionslücke an und bestimmen Sie die Nullstellen von f.
Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von f bei Annäherung an die Definitionslücke.

Nennernullstelle: $(x+2)^2 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $D_f = IR \setminus \{ -2 \}$

Zählernullstellen: $x^3 + 3 \cdot x^2 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Zähler und Nenner haben keine gemeinsamen Nullstellen, also ist $x = -2$ Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{\overset{\overset{\displaystyle 4}{\uparrow}}{x^3 + 3 \cdot x^2}}{\underset{\underset{\displaystyle 0}{\downarrow}}{2 \cdot (x+2)^2}} \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{\overset{\overset{\displaystyle 4}{\uparrow}}{x^3 + 3 \cdot x^2}}{\underset{\underset{\displaystyle 0}{\downarrow}}{2 \cdot (x+2)^2}} \rightarrow \infty$$

**Teilaufgabe 1.2 (6 BE)**
Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgleichung von f auch darstellen lässt durch
$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2} + \frac{2}{(x+2)^2}$.
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von $G_f$ an und untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von x der Graph $G_f$ oberhalb bzw. unterhalb der schiefen Asymptote verläuft.

$$\left(x^3 + 3\cdot x^2\right) \div \left(2\cdot x^2 + 8\cdot x + 8\right) = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2}$$
$$-\left(x^3 + 4\cdot x^2 + 4\cdot x\right)$$
$$-x^2 - 4\cdot x$$
$$-\left(-x^2 - 4\cdot x - 4\right)$$
$$4 \quad \text{Rest}$$

$$\frac{x^3 + 3\cdot x^2}{2\cdot(x+2)^2} = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2} + \frac{4}{2\cdot(x+2)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

Schiefe Asymptote: $g(x) := \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2}$

Senkrechte Asymptote: $x = -2$

$\frac{4}{2\cdot(x+2)^2} > 0 \quad \Rightarrow$ $G_f$ verläuft im Definitionsbereich oberhalb der schiefen Asymptote.

**Teilaufgabe 1.3 (9 BE)**
Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von $G_f$ und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von $G_f$.

[ Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^3 + 6\cdot x^2 + 12\cdot x}{2\cdot(x+2)^3}$ ]

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(x+2)^3} = \frac{(x+2)^3 - 8}{2\cdot(x+2)^3} = \frac{x^3 + 6\cdot x^2 + 12\cdot x + 8 - 8}{2\cdot(x+2)^3} = \frac{x^3 + 6\cdot x^2 + 12\cdot x}{2\cdot(x+2)^3}$$

Horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$x^3 + 6\cdot x^2 + 12\cdot x = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 + \sqrt{3}\cdot i \\ -3 - \sqrt{3}\cdot i \end{pmatrix}$$

Lösung

keine Lsg in IR

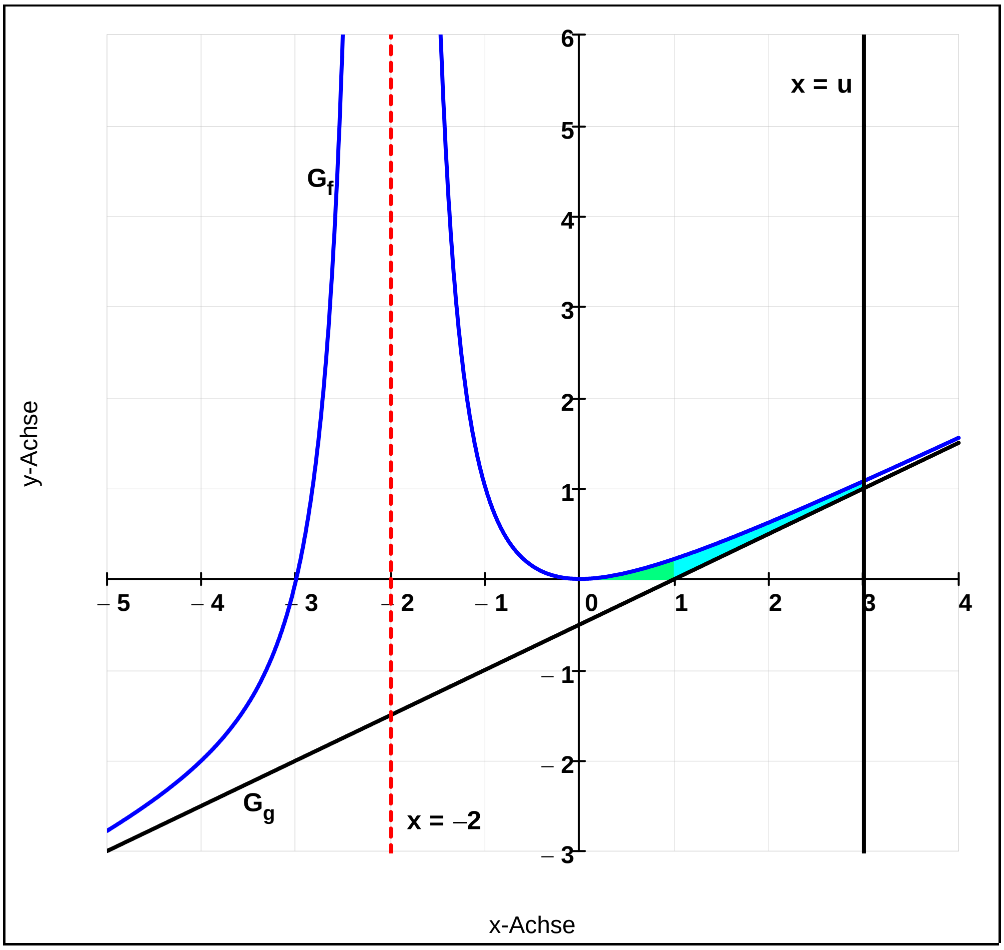
| | | $x \neq -2$ | | $x = 0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Zähler** | **neg** | | **neg** | | **pos** |
| **Nenner** | **neg** | | **pos** | | **pos** |
| **f '(x)** | **pos** | | **neg** | | **pos** |
| $G_f$ | **sms** | | **smf** | | **sms** |
| | | **n.d.** | | **TP** | |

$G_f$ ist streng mon. steigend in $]-\infty\,;\,-2\,[$,
streng mon. fallend in $]-2\,;\,0\,]$ und
steng mon. steigend in $[\,0\,;\,\infty\,[$.

$f(0) = 0$

Tiefpunkt: **TP(0/0)**

**Teilaufgabe 1.4** **(5 BE)**
Zeichnen Sie die Asymptoten von $G_f$ für $-5 \le x \le 4$ in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie $G_f$ in die Zeichnung.



**Teilaufgabe 1.5 (7 BE)**
$G_f$, die x-Achse, die schiefe Asymptote und die Gerade mit der Gleichung $\mathbf{x = u}$ mit $\mathbf{u > 1}$ schließen ein Flächenstück ein. Schraffieren Sie das Flächenstück für $\mathbf{u = 3}$ in der Zeichnung von Aufgabe 1.4 und ermitteln Sie die Maßzahl $\mathbf{A(u)}$ des Flächeninhalts in Abhängigkeit von u. Untersuchen Sie rechnerisch, ob $\mathbf{A(u)}$ für $\mathbf{u} \rightarrow \infty$ endlich ist.

Nullstelle der schiefen Asymptote: $g(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1$

1. Teilfläche: $A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2} + \frac{2}{(x+2)^2}\right] dx$

Stammfunktion 1: $F_1(x) := \int \left[\frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2} + \frac{2}{(x+2)^2}\right] dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{2}{x+2}$

$A_1 := F_1(1) - F_1(0) = \frac{1}{12}$

2. Teilfläche: $A_2 = \int_1^u (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^u \frac{2}{(x+2)^2}\,dx$

Stammfunktion 2: $F_2(x) := \int \frac{2}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{2}{x+2}$

$A_2(u) := F_2(u) - F_2(1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{u+2}$

Gesamtfläche: $A(u) := A_1 + A_2(u)$ $\qquad A(u) = \frac{3}{4} - \frac{2}{u+2}$

$$\lim_{u \to \infty} \left(\frac{3}{4} - \underbrace{\frac{2}{u+2}}_{\downarrow\; 0}\right) \rightarrow \frac{3}{4}$$

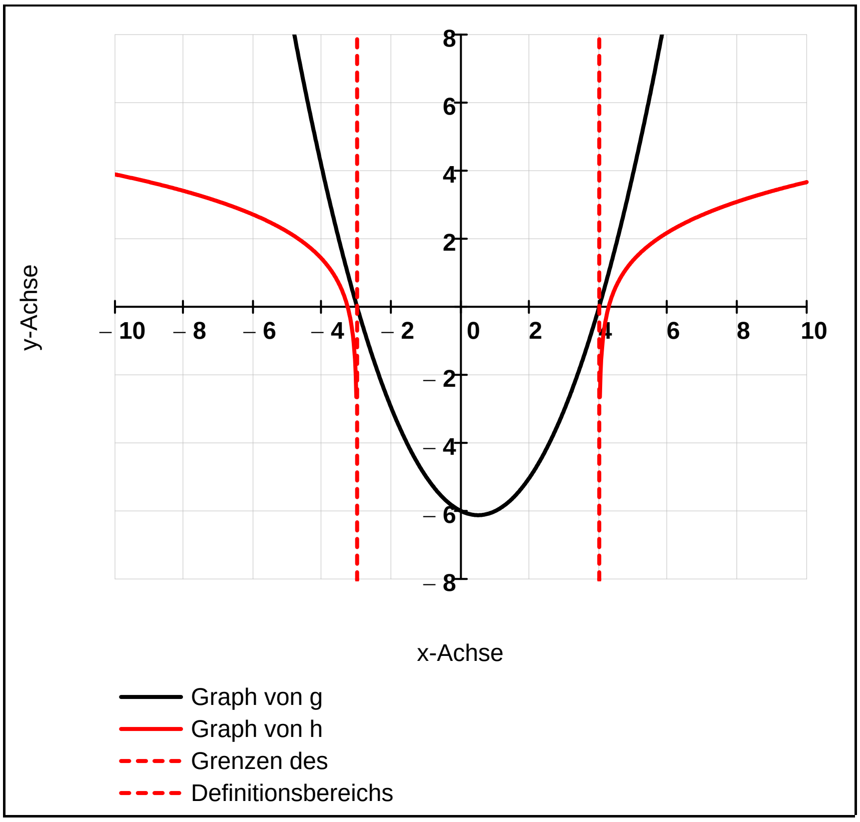
**Teilaufgabe 2 (6 BE)**
Gegeben ist die reelle Funktion h durch $\mathbf{h(x) = \ln(g(x))}$ mit $x \in D_h$. Dabei ist g eine quadratische Funktion, deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, die zwei verschiedene Schnittpunkte mit der x-Achse besitzt.
Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie jeweils Ihre Aussagen.
a) Für die Definitionsmenge gilt: $\mathbf{D_h = IR}$
b) Die Funktion h besitzt genau zwei Nullstellen.
c) Der Graph von h besitzt genau einen Extrempunkt.

Aussage a) ist falsch, da die nach oben geöffnete Parabel zwischen den Nullstellen negativ ist.

Aussage b) ist richtig, da die nach oben geöffnete Parabel zwei Stellen $\mathbf{x_0}$ mit $\mathbf{g(x_0) = 1}$ besitzt und damit $\mathbf{h(x_0) = \ln(1) = 0}$

Aussage c) ist falsch, da die nach oben geöffnete Parabel einen Tiefpunkt zwischen den Nullstellen besitzt, wo h nicht definiert ist.

Graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt.



**Teilaufgabe 3.0**
Für Ausdauersportler ist die Laktatkonzentration L im Blut (in mmol/l) ein Indikator für die Ausdauerleistungsfähigkeit. Bei Läufern wird auf dem Laufband die Laktosekonzentration in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v des Läufers (in km/h) gemessen.
Die Messwerte von Läufer Max bei einem Laktattest lassen vermuten, dass die Werte nach einer Funktion der Form $L(v) = (0.02 \cdot v - 0.25) \cdot e^{a \cdot v} + b$ für $0 \le v \le 19$ verlaufen.
Bei den Rechnungen kann auf Benennungen verzichtet werden. Die Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.

**Teilaufgabe 3.1 (4 BE)**
Berechnen Sie die Werte für a und b, wenn die Laktatkonzentration bei Max in Ruhe $0.95 \cdot \frac{mmol}{l}$ und bei einer Geschwindigkeit von $7 \cdot \frac{km}{h}$ $0.65 \cdot \frac{mmol}{l}$ beträgt.
[ Teilergebnis: $a \approx 0.23$ ; $b \approx 1.20$ ]

Funktionsterm: $L(v, a, b) := (0.02 \cdot v - 0.25) \cdot e^{a \cdot v} + b$

Gleichung 1: $L(0, a, b) = 0.95 \rightarrow b - 0.25 = 0.95$ auflösen, b $\rightarrow 1.2$ $\qquad b = 1.2$

Gleichung 2: $L(7, a, b) = 0.65 \rightarrow b + -0.11 \cdot e^{7 \cdot a} = 0.65$

b in (2) einsetzen: $1.2 - 0.11 \cdot e^{7 \cdot a} = 0.65$

$$0.55 = 0.11 \cdot e^{7 \cdot a}$$

$$5 = e^{7 \cdot a} \text{ auflösen}, a \rightarrow \frac{\ln(5)}{7} \qquad a := \frac{\ln(5)}{7} = 0.23$$

konkreter Funktionsterm: $L(v) := (0.02 \cdot v - 0.25) \cdot e^{0.23 \cdot v} + 1.2$

**Teilaufgabe 3.2 (8 BE)**
Untersuchen Sie mithilfe der 1. Ableitung von L den Verlauf der Laktatkonzentration im Blut von Max und interpretieren Sie die Koordinaten des Extrempunkts im Sachzusammenhang.
[ Teilergebnis: $L'(v) := (0.0046 \cdot v - 0.0375) \cdot e^{0.23 \cdot v}$ ]

$$L'(v) = 0.02 \cdot e^{0.23 \cdot v} + (0.02 \cdot v - 0.25) \cdot 0.23 \cdot e^{0.23 \cdot v} = (0.0046 \cdot v - 0.0375) \cdot e^{0.23 \cdot v}$$

Nullstellen von L'(v): $0.0046 \cdot v - 0.0375 = 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, v \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 8.15$

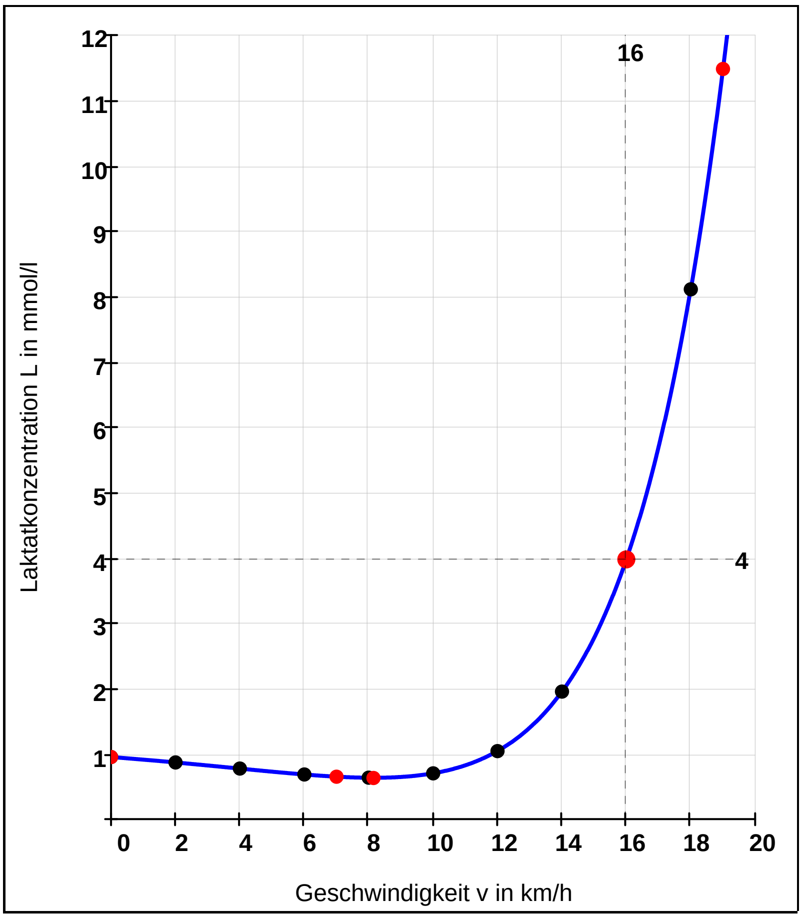
$\mathbf{L'(v) < 0}$ für $\mathbf{[\ 0\ ;\ \ 8.15\ ]}$, d. h. die Laktatkonzentration nimmt ab.

$\mathbf{L'(v) > 0}$ für $\mathbf{[\ 8.15\ ;\ \ 19\ ]}$, d. h. die Laktatkonzentration nimmt zu.

$\mathbf{L(8.15) = 0.63}$

Die Laktatkonzentration hat bei $\mathbf{8.15 \cdot \frac{km}{h}}$ mit ca. $\mathbf{0.63 \cdot \frac{mmol}{l}}$ einen minimalen Wert.

**Teilaufgabe 3.3** **(4 BE)**
Zeichnen Sie die Laktatkurve für $\mathbf{0 \le v \le 19}$ in ein Koordinatensystem.
[ Maßstab: 1 cm entspricht 2 km/h ; 1 cm entspricht 1mmol/l ]




| $\mathbf{v_d} =$ | $\mathbf{L(v_d)} =$ |
|---|---|
| 0 | 0.95 |
| 2 | 0.87 |
| 4 | 0.77 |
| 6 | 0.68 |
| 8 | 0.63 |
| 10 | 0.7 |
| 12 | 1.04 |
| 14 | 1.95 |
| 16 | 3.98 |
| 18 | 8.11 |

$\mathbf{L(19) = 11.48}$

**Teilaufgabe 3.4 (6 BE)**
Der Laktattest dient auch dazu, die persönliche anaerobe Schwelle des Läufers zu ermitteln. Bei der anaeroben Schwelle reicht der aufgenommene Sauerstoff gerade noch aus, um den Energiebedarf in der Muskulatur zu decken.
Zur Bestimmung der anaeroben Schwelle gibt es unterschiedliche Modelle:
a) Die Steigung der Laktatkurve hat den Wert 1.
b) Die Laktatkonzentration im Blut beträgt 4 mmol/l.
Bestimmen Sie die anaerobe Schwelle für Max nach beiden Modellen und vergleichen Sie die Werte.
Verwenden Sie dazu für a) als Näherungsfunktion für die Laktosekonzentration $N(v) = e^{0.5 \cdot v - 7} + 1$ und lesen Sie den Wert für b) aus der Zeichnung von 3.3 ab.

Modell a)

$N'(v) := 0.5 \cdot e^{0.5 \cdot v - 7}$

$v_2 := N'(v) = 1 \rightarrow 0.5 \cdot e^{0.5 \cdot v - 7} = 1 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, v \\ \text{Gleitkommazahl}, 4 \end{array} \right. \rightarrow 15.39$

$v_2 = 15.39$

Modell b) $v_3 := 16$

Die Werte unterscheiden sich geringfügig, beide Modelle führen zu ähnlichen Werten.