Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2014

• Mathematik 13 Nichttechnik - B II - Lösung

Teilaufgabe 1.0
In einem Koordinatensystem des IR^3 sind die Punkte $\mathbf{A(3\,/\;2\,/\;-4)}$, $\mathbf{B_b(b-2\,/\;8\,/\;-12)}$ und $\mathbf{C_c(2\,/\;-1\,/\;c-2)}$ mit $\mathbf{b, c} \in \mathbf{IR}$ sowie die Ebene E: $\mathbf{2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 - 6 = 0}$ und die

Geradenschar $\mathbf{g_m}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{r, m} \in \mathbf{IR}$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 **(5 BE)**
Untersuchen Sie, für welche $\mathbf{b, c} \in \mathbf{IR}$ die Punkte A, B und C keine Ebene aufspannen.

Ortsvektoren:

$$OA := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad OB(b) := \begin{pmatrix} b-2 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad OC(c) := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ c-2 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren linear abhängig?

$$AB(b) := OB(b) - OA = \begin{pmatrix} b-5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad AC(c) := OC(c) - OA = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ c+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} := AB(b) = k \cdot AC(c) \to \begin{pmatrix} b-5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -k \\ -3 \cdot k \\ k \cdot (c+2) \end{bmatrix} \text{ auflösen}, k, b, c \ \to (-2 \quad 7 \quad 2)$$

Für $b_0 = 7$ und $c_0 = 2$ spannen die Punkte A, B und C keine Ebene auf.

Teilaufgabe 1.2 **(5 BE)**
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, welche durch die Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B_{-1}}$ und $\mathbf{C_2}$ (also $\mathbf{b = -1}$ und $\mathbf{c = 2}$) aufgespannt wird, und geben Sie die besondere Lage von F im Koordinatensystem an.
[Mögliches Ergebnis: F: $\mathbf{4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 = 0}$]

$$AB(-1) = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad AC(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Parameterform Ebene F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gauß-Matrix:

$$\begin{pmatrix} -6 & -1 & x_1 - 3 \\ 6 & -3 & x_2 - 2 \\ -8 & 4 & x_3 + 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\cdot(\text{III}) - 4\cdot(\text{I})]{(\text{II}) + (\text{I})} \begin{pmatrix} -6 & -1 & x_1 - 3 \\ 0 & -4 & x_1 + x_2 - 5 \\ 0 & 16 & -4\cdot x_1 + 3\cdot x_3 + 24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(\text{III}) + 4\cdot(\text{II})]{} \begin{pmatrix} -6 & -1 & x_1 - 3 \\ 0 & -4 & x_1 + x_2 - 5 \\ 0 & 0 & 4\cdot x_2 + 3\cdot x_3 - 44 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnungen:

$$3\cdot\left(x_3 + 4\right) - 4\cdot\left(x_1 - 3\right) = 3\cdot x_3 - 4\cdot x_1 + 24$$

$$\left(-4\cdot x_1 + 3\cdot x_3\right) + 24 + 4\cdot\left(x_1 + x_2 - 5\right) = 4\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 4$$

Koordinatenform Ebene F: $4\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 4 = 0$

x_1-Koordinate fehlt, Konstante ungleich Null: F ist echt parallel zur x_1-Achse.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F.

$\mathbf{E \cap F}$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

Wähle: $x_3 = \tau$ 2. Zeile: $x_2 = \frac{1}{4}\cdot(-4 - 3\cdot\tau) = -1 - \frac{3}{4}\cdot\tau$

1. Zeile: $x_1 = \frac{1}{2}\cdot\left[6 + \tau - 2\cdot\left(-1 - \frac{3}{4}\cdot\tau\right)\right] = 4 + \frac{5}{4}\cdot\tau$

Schnittgerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 + \frac{5}{4}\cdot\tau \\ -1 - \frac{3}{4}\cdot\tau \\ \tau \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{-3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Bestimmen Sie die Lage von g_m gegenüber E in Abhängigkeit von m.

[Teilergebnis: $r = \frac{-1}{3+m}$]

$g_m \cap E$:

$$2\cdot(4+2\cdot r) + 2\cdot(2+r\cdot m) - (4-2\cdot r) - 6 = 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow 6\cdot r + 2\cdot m\cdot r + 2 = 0$$

ausklammern: $2\cdot r\cdot(3+m) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{-1}{3+m}$

$m = -3$ Widerspruch, g_{-3} ist echt parallel zur Ebene E.

$m \neq -3$ g_m und E schneiden sich in einem Punkt.

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)
Ermitteln Sie m so, dass der Schnittpunkt von g_m und E in der x_2x_3-Ebene liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts.

Ortsvektor zum Schnittpunkt: $OS(m) := \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{-1}{3+m}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ m \\ -2 \end{pmatrix}\right]$

$S \in x_2x_3$-Ebene, also $x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - \frac{1}{3+m}\cdot 2 = 0$ auflösen, $m \rightarrow -\frac{5}{2}$

$OS\left(\frac{-5}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ Schnittpunkt: $S := OS\left(\frac{-5}{2}\right)^T \qquad S \rightarrow (0 \quad 7 \quad 8)$

Teilaufgabe 2.0
Die drei Abteilungen Kunstofftechnik (K), Elektronik (E) und Leichtbau (L) eines Betriebes sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell mit der Inputmatrix

$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.05 & 0.55 \end{pmatrix}$ verflochten.

Teilaufgabe 2.1 **(3 BE)**
In der momentanen Abrechnungsperiode produziert die Kunststofftechnik 120 Mengeneinheiten (ME), die Elektronik 180 ME und der Leichtbau 140 ME.
Berechnen Sie, welche Mengen an die Konsumenten geliefert werden.

$$\vec{y} = (E - A)\cdot\vec{x}$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.05 & 0.55 \end{pmatrix} \qquad E - A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & -0.05 & 0.45 \end{pmatrix}$$

Produktionsvektor: $x := \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 140 \end{pmatrix}$

Marktvektor: $y := (E - A)\cdot x = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 30 \end{pmatrix}$

K liefert 12 ME, E liefert 8 ME und L liefert 30 ME an den Markt.

Teilaufgabe 2.2 **(7 BE)**
In einem zukünftigen Zeitraum wird damit gerechnet, dass die Abteilungen K und L gleich viel produzieren. Zudem beliefern K und E den Markt in gleichem Umfang. L gibt 42 ME an den Markt ab.
Berechnen Sie unter diesen Voraussetzungen den Produktions- und den Marktvektor.

$$\overrightarrow{x_{neu}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{y_{neu}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ 42 \end{pmatrix} = (E - A)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6\cdot x_1 + 0.8\cdot x_1 \\ -0.2\cdot x_1 + 0.2\cdot x_2 \\ -0.2\cdot x_1 + -0.05\cdot x_2 + 0.45\cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Komponentengleichungen:

Vorgabe

$$y_1 = -0.6 \cdot x_1 + 0.8 \cdot x_1$$

$$y_1 = -0.2 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2$$

$$42 = -0.2 \cdot x_1 + -0.05 \cdot x_2 + 0.45 \cdot x_1$$

$$\text{suchen}(x_1, x_2, y_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 280.0 \\ 560.0 \\ 56.0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 280$ $\quad$ $x_2 = 560$ $\quad$ $y_1 = 56$

$$\overrightarrow{x_{neu}} = \begin{pmatrix} 280 \\ 560 \\ 280 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{y_{neu}} = \begin{pmatrix} 56 \\ 56 \\ 42 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.3.0

Für einen anderen Produktionszeitraum ist der Produktvektor $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \cdot t \\ 140 \end{pmatrix}$ vorgesehen, wobei die reelle Zahl t ($t \geq 0$) eine konjunkturabhängige Größe ist.

Teilaufgabe 2.3.1 (4 BE)
Ermitteln Sie die Marktabgaben in Abhängigkeit von t und damit das Intervall der zulässigen Werte für t.

$$\vec{y}(t) = (E - A) \cdot \vec{x}(t)$$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & -0.05 & 0.45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \cdot t \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.0 \\ 12.0 \cdot t - 28.0 \\ -3.0 \cdot t + 39.0 \end{pmatrix}$$

$$12 \cdot t - 28 \geq 0 \wedge -3 \cdot t + 39 \geq 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \frac{7}{3} \leq t \leq 13$$

Teilaufgabe 2.3.2 (3 BE)
Nun sei $t \in [3;13]$. Bestimmen Sie denjenigen Wert für t, für den die Summe der Marktabgaben maximal wird.

Summe der Marktabgaben:

$s(t) := (12 + 12\cdot t - 28 - 3\cdot t + 39) \quad \Leftrightarrow \quad s(t) = 9\cdot t + 23$

s(t) stellt graphisch eine steigende Gerade dar, der Extrempunkt liegt also auf dem rechten Rand:

$s_{max} := s(13) \qquad s_{max} = 140$ Die Summe ist maximal für **t = 13**.