

## Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2014

## • Mathematik 13 Technik - A II - Lösung



## Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion  $f_a$  mit dem Funktionsterm  $f_a(x) = \frac{4 \cdot e^x}{1 + e^{a \cdot x}}$  mit der Definitionsmenge  $D_{f_a} = \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}^+$ .

## Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte  $f_a(x)$  an den Rändern der Definitionsmenge in Abhängigkeit von  $a$ .

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \uparrow \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot e^x}{1 + e^{a \cdot x}} \rightarrow 0 \\
 \downarrow \\
 0 \qquad \qquad \uparrow \\
 \infty \\
 \uparrow \quad \text{L'Hosp.} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^x}{1 + e^{a \cdot x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^x}{a \cdot e^{a \cdot x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{a \cdot e^{a \cdot x - x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{a \cdot e^{(a-1) \cdot x}} \\
 \downarrow \\
 \infty
 \end{array}$$

Fallunterscheidung für das Vorzeichen von  $a - 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{a \cdot e^{(a-1) \cdot x}} \quad \text{annehmen, } a > 1 \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{a \cdot e^{(a-1) \cdot x}} \quad \text{annehmen, } a = 1 \rightarrow 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{a \cdot e^{(a-1) \cdot x}} \quad \text{annehmen, } 0 < a < 1 \rightarrow \infty$$

**Teilaufgabe 1.2 (9 BE)**

Ermitteln Sie das Monotonieverhalten sowie gegebenenfalls die Abszisse und die Art des Extrempunktes des Graphen von  $f_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .

[ Mögliches Zwischenergebnis:  $f'_a(x) = 4 \cdot \frac{e^x \cdot [1 + e^{a \cdot x} \cdot (1 - a)]}{(1 + e^{a \cdot x})^2}$

$$f'_a(x) = 4 \cdot \frac{e^x \cdot (1 + e^{a \cdot x}) - e^x \cdot a \cdot e^{a \cdot x}}{(1 + e^{a \cdot x})^2} = 4 \cdot \frac{e^x \cdot (1 + e^{a \cdot x} - a \cdot e^{a \cdot x})}{(1 + e^{a \cdot x})^2} = 4 \cdot \frac{e^x \cdot [1 + (1 - a) \cdot e^{a \cdot x}]}{(1 + e^{a \cdot x})^2}$$

Das Vorzeichen des Zählers wird bestimmt durch den Term  $g(x, a) := 1 + (1 - a) \cdot e^{a \cdot x}$

waagrechte Tangenten:

$$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + (1 - a) \cdot e^{a \cdot x} \Leftrightarrow e^{a \cdot x} = \frac{-1}{1 - a} = \frac{1}{a - 1}$$

$$x = \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{1}{a - 1}\right) = -\left(\frac{1}{a} \cdot \ln(a - 1)\right) = \frac{-\ln(a - 1)}{a}$$

Extrempunkte gibt es nur, falls  $a > 1$



|           |           |     |
|-----------|-----------|-----|
|           | $a > 1$   |     |
|           | $x_e(a1)$ |     |
|           | $G_g$     |     |
| Zähler    | pos       | neg |
| Nenner    | pos       | pos |
| $f'_a(x)$ | pos       | neg |
| $G_f$     | smf       | smf |
|           | HP        |     |

Für  $a > 1$  ist

$G_f$  ist streng monoton steigend in  $]-\infty; \frac{-\ln(a - 1)}{a}]$ ,

und streng monoton fallend in  $[\frac{-\ln(a - 1)}{a}; \infty[$

Abszisse des Hochpunktes:  $x_{HP} = \frac{-\ln(a - 1)}{a}$

Für  $0 < x \leq 1$  ist  $G_f$  streng monoton steigend in  $\mathbb{R}$ .

Für die folgenden Teilaufgaben gilt  $a = 2$ .

### Teilaufgabe 1.3 (7 BE)

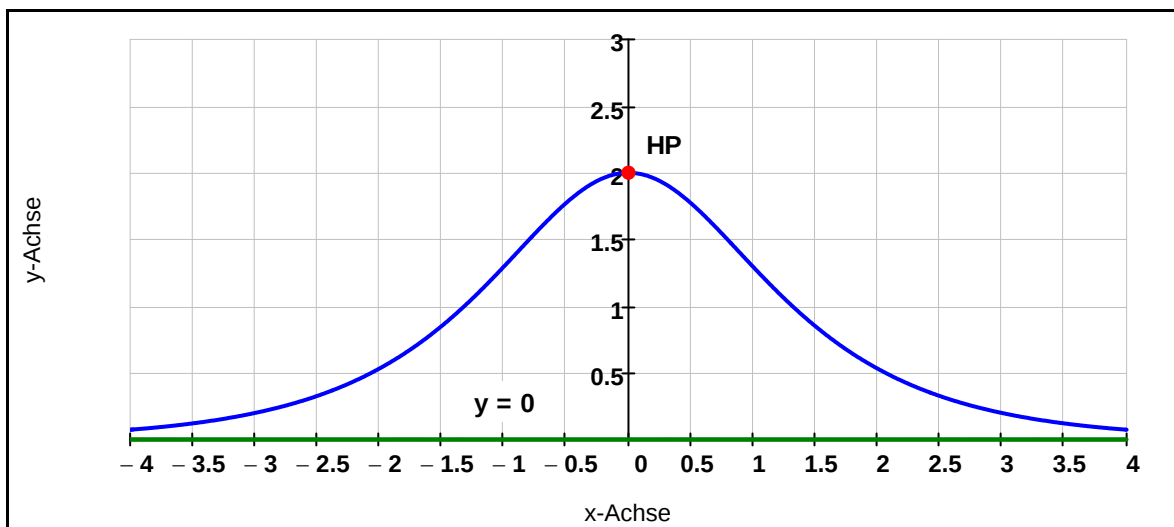
Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von  $f_2$ . Geben Sie die Gleichung der Asymptote und die Koordinaten und die Art des Extrempunkts des Graphen von  $f_2$  an. Zeichnen Sie den Graphen von  $f_2$  im Bereich  $-3 \leq x \leq 3$  unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 2 cm).

$$f(x) := \frac{4 \cdot e^x}{1 + e^{2 \cdot x}} \quad f(-x) = \frac{4 \cdot e^{-x}}{1 + e^{-2 \cdot x}} \cdot \frac{e^{2 \cdot x}}{e^{2 \cdot x}} = \frac{4 \cdot e^x}{e^{2 \cdot x} + 1} = f(x)$$

$\Rightarrow$   $G_f$  ist achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{waagrechte Asymptote } y = 0$$

$$\text{Hochpunkt: } x_{\text{HP}} = \frac{-\ln(2-1)}{2} = 0 \quad f(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{HP}(0/2)$$



**Teilaufgabe 1.4.0**

Gegeben ist weiter die Integralfunktion  $F$  mit  $F(x) = \int_0^x f_2(t) dt$  mit der Definitionsmenge  $D_F = \mathbb{R}$ .

**Teilaufgabe 1.4.1 (3 BE)**

Bestimmen Sie, ohne  $F(x)$  integralfrei darzustellen, die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von  $F$ .

Wendepunkt von  $F$ :  $F''(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$

Extrempunkt von  $f$  ist Wendepunkt von  $F$ :  $x_W = 0 \quad F(0) = 0 \Rightarrow \text{WP}(0/0)$

**Teilaufgabe 1.4.2 (5 BE)**

Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von  $F(x)$  und untersuchen Sie damit, ob die Fläche, die vom Graphen von  $f_2$  und den Koordinatenachsen im ersten Quadranten begrenzt wird, einen endlichen Flächeninhalt hat.

Gesucht: 
$$F(x) = \int_0^x \frac{4 \cdot e^t}{1 + e^{2 \cdot t}} dt$$

Substitution:  $z = e^t \quad \frac{dz}{dt} = e^t \quad dt = \frac{dz}{e^t} = \frac{dz}{z}$

$$\int \frac{4 \cdot e^t}{1 + e^{2 \cdot t}} dt = \int \frac{4}{1 + z^2} dz = 4 \cdot \arctan(z) = 4 \cdot \arctan(e^t)$$

$$F(x) = 4 \cdot \arctan(e^x) - 4 \cdot \arctan(e^0) = 4 \cdot \arctan(e^x) - 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan(e^x) - \pi$$

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} (4 \cdot \arctan(e^x) - \pi) = \pi \quad \text{also endlicher Flächeninhalt.}$$

↓

$$\frac{\pi}{2}$$



**Teilaufgabe 2.0**

Gegeben ist nun die Funktion  $g$  mit  $g(x) := \arccos(-2 \cdot x^2 + 1)$  in der maximalen Definitionsmenge  $D_g \subseteq \mathbb{R}$ .

**Teilaufgabe 2.1 (3 BE)**

Zeigen Sie, dass gilt:  $D_g = [-1; 1]$ .

$$1 \leq -2 \cdot x^2 + 1 \leq 1$$

$$\text{Linke Seite: } 1 \leq -2 \cdot x^2 + 1 \Leftrightarrow 2 \cdot x^2 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Rechte Seite: } -2 \cdot x^2 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \cdot x^2 \geq 0 \quad \text{erfüllt für } x \in \mathbb{R}.$$

Zusammenfassung:  $D_g = [-1; 1]$ .

**Teilaufgabe 2.2 (6 BE)**

Ermitteln Sie  $g'(x)$  und die maximale Definitionsmenge  $D_{g'}$  von  $g'$ .

[ Mögliches Teilergebnis:  $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$  für  $x \in ]0; 1[$ .

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (-2 \cdot x^2 + 1)^2}} \cdot (-4 \cdot x) = \frac{4 \cdot x}{\sqrt{1 - 4 \cdot x^4 + 4 \cdot x^2 - 1}} = \frac{4 \cdot x}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot (-x^2 + 1)}} = \frac{4 \cdot x}{2 \cdot |x| \cdot \sqrt{1 - x^2}}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{if } 0 < x < 1 \\ \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{if } -1 < x < 0 \end{cases} \quad D_{g'} = ]-1; 1[ \setminus \{0\}$$

**Teilaufgabe 2.3 (6 BE)**

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten sowie die Koordinaten und die Art sämtlicher Extrempunkte des Graphen von  $g$ . Ermitteln Sie auch das Verhalten von  $g'(x)$  für  $x \rightarrow \pm 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow -2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt auf der Nahtstelle.}$$

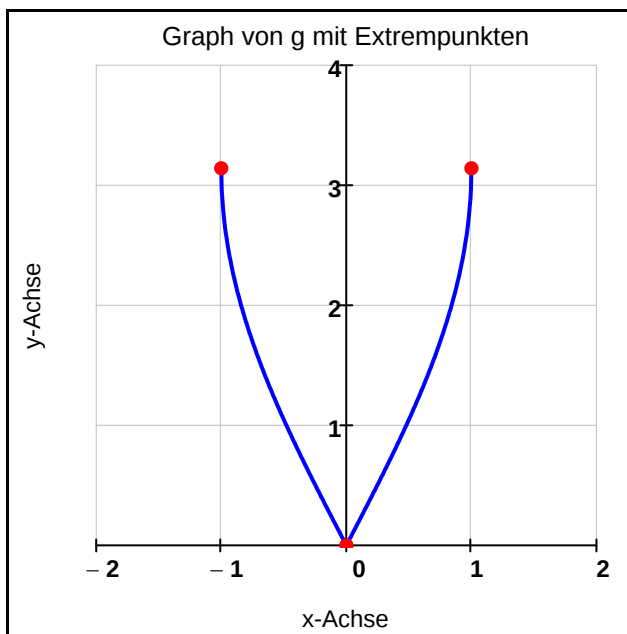
$$g(0) = 0 \quad \text{TP}(0/0)$$

$G_f$  ist streng monoton fallend in  $[-1; 0[$  und streng monoton steigend in  $]0; 1]$

$$g(-1) = \pi \quad \text{Hochpunkt auf dem linken Rand:} \quad \text{HP}_1(-1 / \pi)$$

$$g(1) = \pi \quad \text{Hochpunkt auf dem rechten Rand:} \quad \text{HP}_2(1 / \pi)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \infty$$



#### Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Begründen Sie, dass sich  $\bar{g}(x)$  für  $x \in [0; 1]$  schreiben lässt als  $\bar{g}(x) = 2 \cdot \arcsin(x) + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ , und bestimmen Sie  $c$ .

$$\text{für } 0 \leq x \leq 1: \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\bar{g}'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \quad g'(x) = \bar{g}'(x) \quad \Rightarrow \quad \bar{g}(x) = 2 \cdot \arcsin(x) + c$$

!

$$\bar{g}\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + c = \frac{\pi}{3} + c = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$$\text{Also gilt:} \quad g(x) = \arccos(-2 \cdot x^2 + 1) = 2 \cdot \arcsin(x)$$

**Teilaufgabe 2.5 (5 BE)**

Begründen Sie, dass die Funktion  $h$  mit  $h(x) = g(x)$  für  $x \in D_h = [-1; 0]$  umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion  $h^{-1}(x)$  sowie die Definitionsmenge  $D_{h^{-1}}$ .

$G_g$  ist streng monoton fallend in  $D_h = [-1; 0]$ , also umkehrbar.

$$g(-1) = \pi \quad g(0) = 0 \quad \text{Wertemenge der Funktion:} \quad W_h = [0; \pi]$$

$$\text{Definitionsmenge der Umkehrfunktion:} \quad D_{h^{-1}} = [0; \pi]$$

$$\text{Wertemenge der Umkehrfunktion:} \quad W_{h^{-1}} = [-1; 0]$$

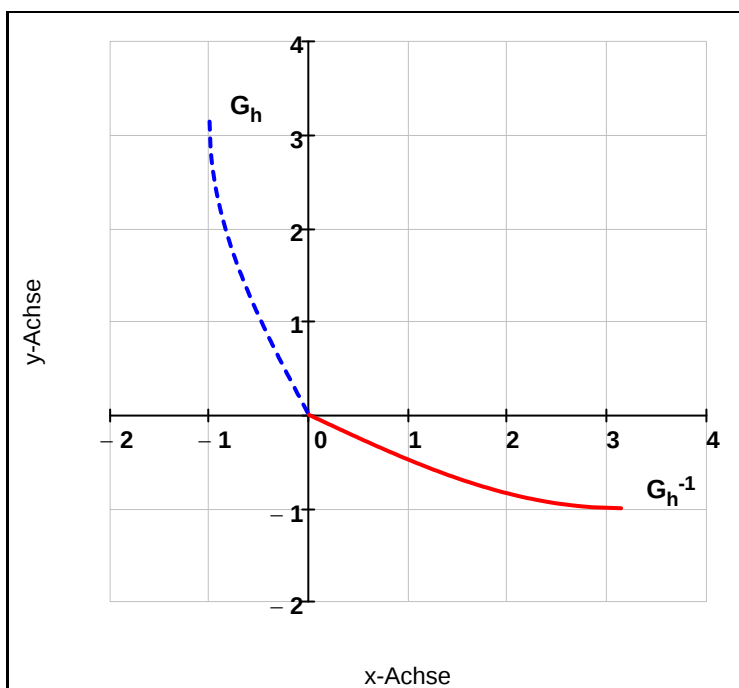
$$y = \arccos(-2 \cdot x^2 + 1)$$

$$\text{Vertauschen der Variablen:} \quad x = \arccos(-2 \cdot y^2 + 1)$$

$$\text{Auflösen nach } y: \quad (-2 \cdot y^2 + 1) = \cos(x) \quad y^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(x))$$

$$\text{Wurzel ziehen:} \quad y_1(x) = -\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(x))} \quad \text{Umkehrfunktion}$$

$$y_2(x) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(x))} \quad \text{nicht in } W$$



**Teilaufgabe 3 (6 BE)**

Ein Körper wird für  $t \geq 0$  durch eine zeitlich konstante Kraft beschleunigt und unterliegt einer zur Geschwindigkeit  $v(t)$  proportionalen Reibungskraft. Die Bewegung des Körpers wird dabei durch folgende Differentialgleichung beschrieben:  $10 \cdot v' + v = 40$  mit  $v'(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ . Die Einheiten für  $t$  und  $v$  (Sekunde und Meter pro Sekunde) bleiben bei der Rechnung unberücksichtigt. Bestimmen Sie  $v(t)$  für  $t \geq 0$  mithilfe der Methode der Variation der Konstanten für die Anfangsbedingung  $v(0) = 10$

Inhomogene DGL:  $10 \cdot v' + v = 40 \quad \Leftrightarrow \quad v' + \frac{v}{10} = 4$

Homogene DGL:  $v' + \frac{v}{10} = 0 \quad \frac{dv}{dt} = \frac{-v}{10} \quad \text{Triviale Lösung: } v = 0$

Trennen der Variablen:  $\frac{dv}{v} = \frac{-1}{10} \cdot dt \quad \text{mit } v \neq 0$

$$\int \frac{1}{v} dt = \int \frac{-1}{10} dt$$

Integration:  $\ln(v) = \frac{-1}{10} \cdot t + k \quad (\text{Betrag nicht nötig})$

Delogarithmieren:  $v = e^{\frac{-1}{10} \cdot t + k} = K \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}.$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL:  $v_h(t) = K \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t}$

Variation der Konstanten:  $v_p(t) = K(t) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t}$

$$v'_p(t) = K'(t) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} + K(t) \cdot \left( \frac{-1}{10} \right) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t}$$

Einsetzen in inhomogene DGL:

$$K'(t) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} + K(t) \cdot \left( \frac{-1}{10} \right) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} + \frac{1}{10} \cdot K(t) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} = 4$$

Auflösen:  $K'(t) = 4 \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t}$

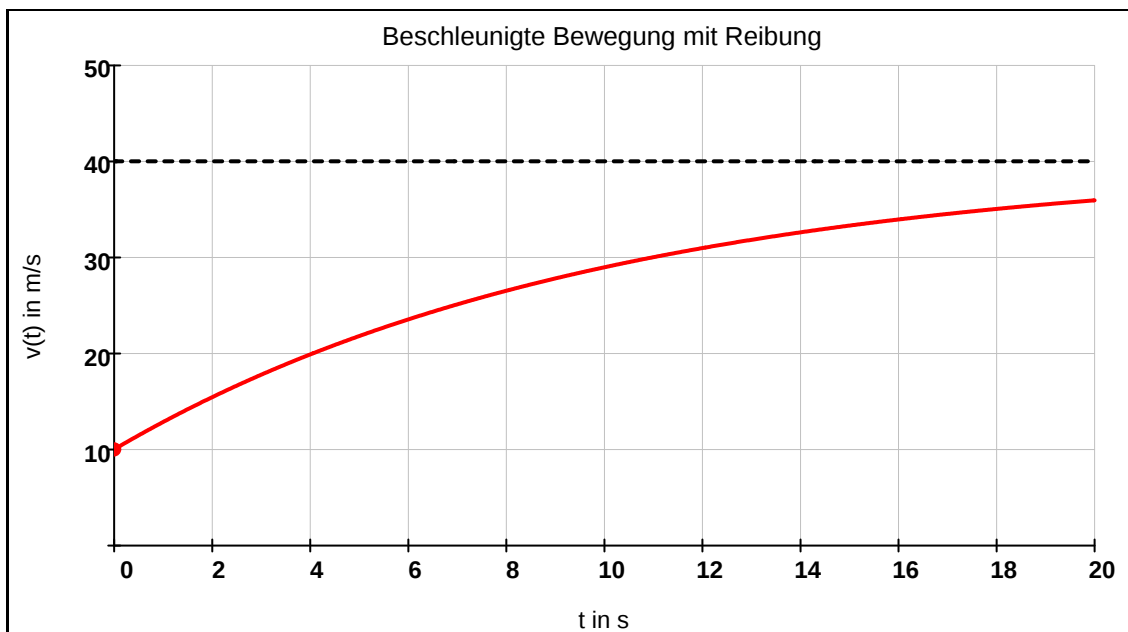
Integrieren:  $K(t) = \int 4 \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t} dt = 4 \cdot (10) \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t}$

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL:  $v_p(t) = 40 \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t} \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t} = 40$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:  $v_A(t) = K \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t} + 40$

Anfangsbedingung einsetzen:  $v_A(0) = 10 \Leftrightarrow K + 40 = 10 \Leftrightarrow K = -30$

Spezielle Lösung:  $v_A(t) = -30 \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t} + 40$   $v_A(t) = 40 - 30 \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t}$



Anhang zu 1.2

$$g(x, a) := \frac{4 \cdot e^x}{1 + e^{a \cdot x}}$$

