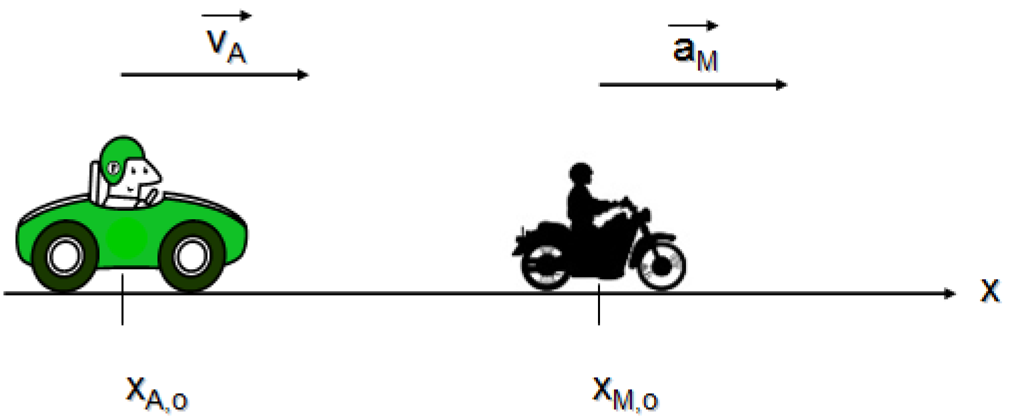
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Physik 12 Technik - Aufgabe I - Lösung**

Ein Motorrad startet zum Zeitpunkt $t_0 = 0 \cdot s$ aus dem Sillstand heraus. Der Schwerpunkt von Motorrad und Fahrer befindet sich zu diesem Zeitpunkt am Ort mit der x-Koordinate $x_{M,o} = 0 \cdot m$.



Das Motorrad beschleunigt bis zum Zeitpunkt $t_1 = 8.0 \cdot s$ und fährt dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Zur Vereinfachung wird angenommen, die Beschleunigung $\vec{a}_M$ des Motorrads sei konstant und habe den Betrag $a_M = 3.50 \cdot \frac{m}{s^2}$.

Ein Auto fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_A$, die den Betrag $v_A = 21 \cdot \frac{m}{s}$ hat. Der Schwerpunkt des Autos befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0 \cdot s$ am Ort mit der Koordinate $x_{A,o} = -100 \cdot m$.

Beide Fahrzeuge bewegen sich längs der x-Achse eines Koordinatensystems in die Richtung, in der die x-Werte zunehmen. Bei den folgenden Überlegungen ist eine Betrachtung der Schwerpunkte ausreichend.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Geben Sie für das Zeitintervall $[\,0 \cdot s;\ 8.0 \cdot s\,]$ die Zeit-Ort-Gleichung für die beiden Fahrzeuge mit eingesetzten Werten an.

Motorrad: $x_M(t) = x_{Mo} + \frac{1}{2} \cdot a_M \cdot t^2 = 1.75 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot t^2$ für $0 \cdot s \le t \le 8 \cdot s$

Auto: $x_A(t) = x_{Ao} + v_A \cdot t = -100 \cdot m + 21 \cdot \frac{m}{s} \cdot t$ für $0 \cdot s \le t \le 8 \cdot s$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Begründen Sie rechnerisch, dass sich die beiden Fahrzeuge zu keinem Zeitpunkt t mit $0 \cdot s \le t \le 8.0 \cdot s$ *auf gleicher Höhe*, d. h. an Orten mit gleicher x-Koordinate befinden.

Die Fahrzeuge würden sich genau dann auf gleicher Höhe befinden, wenn gilt: $x_M(t) = x_A(t)$

$$1.75 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot t^2 = -100 \cdot m + 21 \cdot \frac{m}{s} \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad 1.75 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot t^2 - 21 \cdot \frac{m}{s} \cdot t + 100 \cdot m$$

Diskriminante: $$D = \left(-21 \cdot \frac{m}{s}\right)^2 - 4 \cdot 1.75 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot 100 \cdot m = 441 \cdot \frac{m^2}{s^2} - 700 \cdot \frac{m^2}{s^2} \quad < 0$$

Die quadratische Gleichung besitzt keine Lösung, die Fahrzeuge befinden sich daher nie gleichzeitig am gleichen Ort.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Berechnen Sie den Zeitpunkt t_0, zu dem die Geschwindigkeit des Motorrads genau so groß ist wie die Geschwindigkeit des Autos, und begründen Sie, dass zu diesem Zeitpunkt t* der Vorsprung des Motorrads gegenüber dem Auto am geringsten ist.

Motorrad: $v_M(t) = a_M \cdot t$

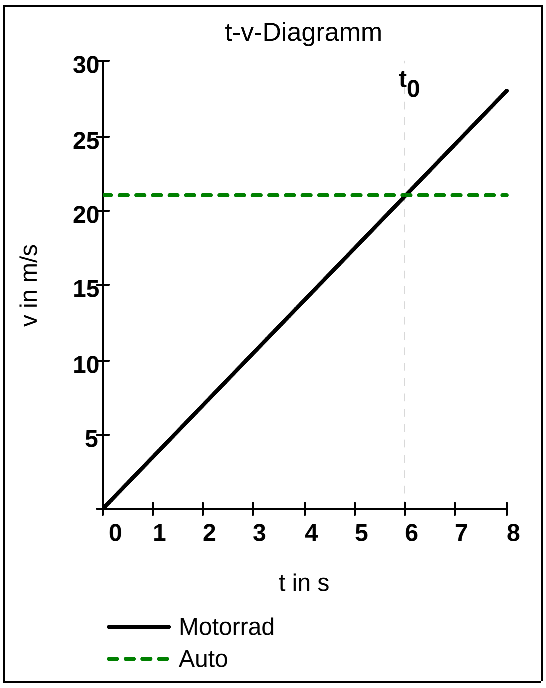
Auto: $v_A(t) = v_A$

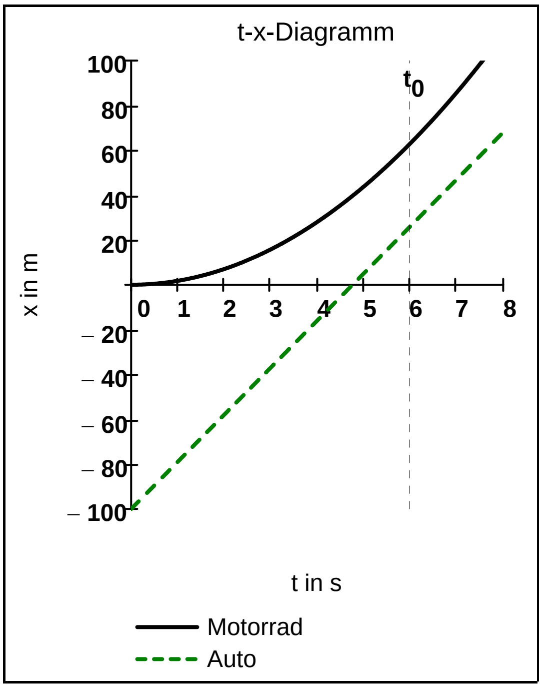
Bedingung: $v_M(t) = v_A(t) \quad \Leftrightarrow \quad a_M \cdot t = v_A$

Auflösen: $t_0 = \dfrac{v_A}{a_M} \qquad t_0 := \dfrac{21 \cdot \frac{m}{s}}{3.50 \cdot \frac{m}{s^2}} \qquad t_0 = 6.0\,s$

Im Zeitintervall $[\ 0 \cdot s ;\ 6.0 \cdot s\ [$ wächst die Geschwindigkeit des Motorrads von $0 \cdot \frac{m}{s}$ auf $21 \cdot \frac{m}{s}$, also verringert sich in diesem Zeitintervall der Vorsprung des Motorrads gegenüber dem Auto, wobei aber nach 1.2 das Motorrad bis zum Zeitpunkt t_0 = 6,0 s vom Auto nicht eingeholt wird.
Ab dem Zeitpunkt t_0, also im Intervall $]\ 6 \cdot s ;\ 8.0 \cdot s\ [$, ist die Geschwindigkeit des Motorrads größer als die Geschwindigkeit des Autos, somit nimmt der Vorsprung ab diesem Zeitpunkt zu.
Somit ist der Vorsprung des Motorrads zum Zeitpunkt t_0 am geringsten.

Folgende Diagramme in der Prüfung nicht verlangt:





Teilaufgabe 1.4.0
Der Motorrad und der Fahrer haben die Gesamtmasse $m = 250 \cdot kg$.
Für die folgenden Aufgaben wird zur Vereinfachung angenommen, dass bei allen im Zeitintervall $]\, 0 \cdot s ;\ 5.0 \cdot s\,]$ auftretenden Geschwindigkeiten der auftretende Fahrwiderstand $\overrightarrow{F_W}$ des Motorrades denselben Betrag F_W hat. Dabei gilt: $F_W = 0.18 \cdot F_G$, wobei F_G der Betrag der Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$ von Motorrad mit Fahrer ist.

Teilaufgabe 1.4.1 (4 BE)
Berechnen Sie den Betrag F_A der Antriebskraft $\overrightarrow{F_A}$, die der Motor im Zeitintervall $]\, 0 \cdot s ;\ 5.0 \cdot s\,]$ ausübt.
[Ergebnis: $F_A = 1.3 \cdot kN$]

Die beschleunigende Kraft $\vec{F}$ ist die Resultierende aus der vom Motor ausgeübten Antriebskraft $\overrightarrow{F_A}$ und dem Fahrwiderstand $\overrightarrow{F_W}$.

Vektorgleichung: $\vec{F} = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_W}$

Betragsgleichung: $F = F_A - F_W \qquad F = m \cdot a_M \qquad F_W = 0.18 \cdot F_G$

Einsetzen: $F_A = F + F_W = m \cdot a_M + 0.18 \cdot m \cdot g = m \cdot \left(a_M + 0.18 \cdot g\right)$

Mit Zahlenwerten: $F_A := 250 \cdot kg \cdot \left(3.50 \cdot \frac{m}{s^2} + 0.18 \cdot 9.81 \cdot \frac{m}{s^2}\right)$

$F_A = 1.32 \cdot kN$

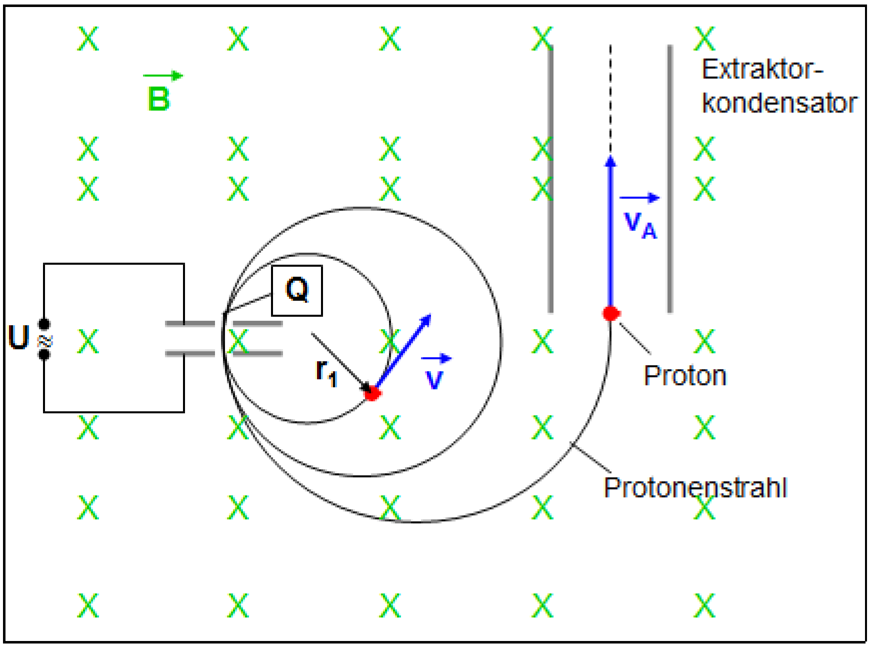
Teilaufgabe 1.4.2 (3 BE)
Zu einem Zeitpunkt t gibt der Motor die momentane Leistung P(t) ab.
Bestimmen Sie P(t) für den Zeitpunkt $t = 5.0 \cdot s$.

Leistung: $P(t) = F_A \cdot v(t) = F_A \cdot a_M \cdot t$

$P(t) := 1.32 \cdot 10^3 \cdot N \cdot 3.50 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot 5.0 \cdot s$

$P(t) = 23.1 \cdot kW$

Teilaufgabe 2.0
Ein Mikroton ist ein Kreisbeschleuniger, in dem Protonen, die von der Ionenquelle Q emittiert werden, im elektischen Feld eines Kondensators wiederholt beschleunigt werden. An dem Kondensator liegt eine Wechselspannung U an. Durch ein homogenes Magnetfeld, dessen Flussdichte $\vec{B}$ zeitlich konstant ist und den Betrag $B = 170 \cdot mT$ hat, werden die Protonen auf Kreisbahnen geführt (siehe Skizze). Die gesamte Anordnung befindet sich im Vakuum.



Betrachtet werden Protonen, die im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten immer genau dann beschleunigt werden, wenn die Wechselspannung gerade ihren Scheitelwert $U_0 = 5.0 \cdot kV$ erreicht. Dabei nimmt die kinetische Energie der Protonen um ΔE_{kin} zu. Die kinetische Energie der Protonen ist beim ersten Eintritt in das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten vernachlässigt klein. Das elektrische Feld ist auf den Bereich zwischen den Kondensatorplatten begrenzt.

Ein Proton besitzt die Masse $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot kg$ und trägt die Ladung $q_p = 1.60 \cdot 10^{-19} \cdot As$.
Die Gewichtskraft der Protonen kann vernachlässigt werden.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)
Berechnen Sie ΔE_{kin}. erläutern Sie dabei kurz Ihren Lösungsansatz.

Die Zunahme ΔE_{kin} der kinetischen Energie eines Protons bei einem Durchgang durch das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten ist gleich der Arbeit W_{el}, die die elektrische Feldkraft am Proton verrichtet.

$$\Delta E_{kin} = W_{el} = q_P \cdot U_0$$

$$\Delta E_{kin} := 1.60 \cdot 10^{-19} \cdot A \cdot s \cdot 5.0 \cdot 10^{3} \cdot V \qquad \Delta E_{kin} = 8.0 \cdot 10^{-16} \cdot J$$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Nach dem ersten Durchgang verlassen die Protonen das elektrische Feld des Kondensators mit einer Geschwindigkeit $\vec{v_1}$. Berechnen Sie den Betrag v_1 der Geschwindigkeit $\vec{v_1}$.

[Ergebnis: $v_1 = 9.8 \cdot 10^5 \cdot \frac{m}{s}$]

Da die Energie eines Protons beim ersten Eintritt in das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten vernachlässigbar klein ist, gilt:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m_P \cdot v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E_{kin}}{m_P}} \qquad v_1 := \sqrt{\frac{2 \cdot \left(8.0 \cdot 10^{-16} \cdot J\right)}{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot kg}} \qquad v_1 = 9.8 \times 10^5 \frac{m}{s}$$

Teilaufgabe 2.3.0
Außerhalb des zwischen den Kondensatorplatten herrschenden elektrischen Feldes wird die Bewegung der Protonen nur noch durch das Magnetfeld beeinflusst.

Teilaufgabe 2.3.1 (5 BE)
Die Geschwindigkeit $\vec{v_1}$ ist senkrecht zur magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ gerichtet.
Begründen Sie ausführlich, dass sich die Protonen bis zum nächsten Eintritt in den Raum zwischen den Kondensatorplatten auf einer Kreisbahn bewegen.

Die Geschwindigkeit $\vec{v_1}$ ist die Anfangsgeschwindigkeit der Protonen für die Bewegung außerhalb des Kondensators. Im Magnetfeld wird die Bewegung der Protonen nur durch die Lorentzkraft $\vec{F_L} = q_P \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ beeinflusst. Dabei ist $\vec{v}$ die Bahngeschwindigkeit eines Protons im Magnetfeld.
Es gilt:

(i) $\vec{v} \perp \vec{B} \wedge \vec{F_L} \perp \vec{B}$ $\Rightarrow$ Die Protonen bewegen sich in einer zu $\vec{B}$ senkrechten Ebene.

$\Rightarrow$ Protonen bewegen sich außerhalb des Kondensators so, dass $\vec{v} \perp \vec{B}$.

(ii) $\vec{F_L} \perp \vec{v}$ $\Rightarrow$ d. h. die die Protonen ablenkende Kraft $\vec{F_L}$ ist stets senkrecht zur Flugbahn der Protonen gerichtet, sie verrichtet am Proton keine Arbeit, deshalb bleibt der Betrag v der Geschwindigkeit $\vec{v}$ konstant.

(iii) $\vec{v} \perp \vec{B}$ $\Rightarrow$ Für den Betrag der Lorentzkraft gilt: $F_L = q_P \cdot v \cdot B$

Das Magnetfeld ist homogen und zeitlich konstant. Mit (i), (ii) und (iii) folgt, dass sich die Protonen im Magnetfeld auf einer Kreisbahn bewegen, die Lorentzkraft $\vec{F_L}$ wirkt als Zentralkraft $\vec{F_Z}$.

Teilaufgabe 2.3.2 (5 BE)
Nachdem die Protonen das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ verlassen haben, bewegen sie sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_1.
Berechnen Sie r_1. Führen Sie dabei eine Einheitenumrechnung durch.
[Ergebnis: $r_1 = 6.0 \cdot cm$]

Kreisbewegung: $\vec{F}_L = \vec{F}_Z$

Betragleichung: $F_L = F_Z \quad \Leftrightarrow \quad q_P \cdot v_1 \cdot B = \dfrac{m_P \cdot v_1^2}{r_1}$

Auflösen: $r_1 = \dfrac{m \cdot v_1}{q_P \cdot B} \qquad r_1 := \dfrac{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot kg \cdot 9.8 \cdot 10^5 \cdot \frac{m}{s}}{1.60 \cdot 10^{-19} \cdot A \cdot s \cdot 170 \cdot 10^{-3} \cdot T} \qquad r_1 = 0.06\,m$

Einheitenumrechnung: $\dfrac{kg \cdot \frac{m}{s}}{A \cdot s \cdot T} = \dfrac{kg \cdot m \cdot m^2}{s \cdot A \cdot s \cdot V \cdot s} = \dfrac{kg \cdot m^2}{s^2} \cdot \dfrac{m}{A \cdot V \cdot s} = J \cdot \dfrac{m}{J} = m$

Teilaufgabe 2.3.3 (4 BE)
Bei jedem Umlauf durchlaufen die Protonen einmal die Beschleunigungsspannung U_0.
Die Laufzeiten zwischen den Kondensatorplatten sind vernachlässigbar klein gegenüber den Umlaufzeiten auf den Kreisbahnen außerhalb des Kondensators.
Weisen Sie durch allgemeine Rechnung nach, dass die Umlaufzeiten T der Protonen auf den Kreisbahnen gleich groß sind, obwohl die Radien r der Kreisbahnen und die Bahngeschwindigkeiten $\vec{v}$ der Protonen auf diesen Kreisbahnen von Umlauf zu Umlauf größer werden.

$v = \omega \cdot r = \dfrac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{2 \cdot \pi}{v} \cdot r = \dfrac{2 \cdot \pi}{v} \cdot \dfrac{m \cdot v}{q_P \cdot B} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot m}{q_P \cdot B} = konstant$ unabhängig von r und v.

Teilaufgabe 2.3.4 (3 BE)
Die Frequenz f der Spannung U wird auf einen Wert eingestellt, bei dem die Protonen nach jedem Umlauf wieder die Beschleunigungsspannung $U_0 = 5.0 \cdot kV$ durchlaufen.
Berechnen Sie einen möglichen Wert für die Frequenz f.

$T = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot m}{q_P \cdot B} \qquad f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{q_P \cdot B}{2 \cdot \pi \cdot m}$

$f := \dfrac{1.60 \cdot 10^{-19} \cdot A \cdot s \cdot 170 \cdot 10^{-3} \cdot T}{2 \cdot \pi \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot kg} \qquad f = 2.6 \cdot MHz$

Teilaufgabe 2.3.5 (4 BE)
Berechnen Sie die Anzahl n der Umläufe, die ein Proton mindestens benötigt, damit es im Mikrotron auf eine Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ mit dem Betrag $v_A = 4.75 \cdot 10^6 \cdot \frac{m}{s}$ beschleunigt wird.

Ein Proton besitzt nach n Umläufen im Mikrotron die kinetische Energie $E_{kin,n}$.

$$E_{kin,n} = n \cdot q_P \cdot U_0 \qquad \frac{1}{2} \cdot m_P \cdot v_A^2 = n \cdot q_P \cdot U_0$$

Auflösen: $n = \frac{m_P \cdot v_A^2}{2 \cdot q_P \cdot U_0}$ $\qquad n := \frac{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot kg \cdot \left(4.75 \cdot 10^6 \cdot \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 1.60 \cdot 10^{-19} \cdot A \cdot s \cdot 5.0 \cdot 10^3 \cdot V}$ $\qquad n = 24$

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Mithilfe eines so genannten Extraktorkondensators sollen die Protonen, die auf die Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ beschleunigt wurden, nun aus dem Magnetfeld vertikal nach oben herausgeführt werden.
Berechnen Sie den dafür notwendigen Betrag der elektrischen Feldstärke $\vec{E}_A$ im Extraktorkondensator.

Wenn ein Proton mithilfe des Extraktorkondensators vetikal nach oben aus dem Magnetfeld herausgeführt werden soll, muss für die elektrische Kraft $\vec{F}_{el}$ und die Lorentzkraft $\vec{F}_L$, die im Extraktorkondensator auf das Proton wirken, gelten: $\vec{F}_{el} = -\vec{F}_L$ (Geschwindigkeitsfilter).

Betragsgleichung: $F_{el} = F_L \quad \Leftrightarrow \quad q_P \cdot E_A = q_P \cdot v_A \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad E_A = v_A \cdot B$

Konkrete Werte einsetzen: $E_A := 4.75 \cdot 10^6 \cdot \frac{m}{s} \cdot 170 \cdot 10^{-3} \cdot T$ $\qquad E_A = 8.07 \times 10^5 \cdot \frac{V}{m}$