Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Physik 12 Technik - Aufgabe II - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
Ein Satellit soll von der Erdoberfläche aus in die geostationäre Umlaufbahn geführt werden. Die Masse der Erde beträgt $m_E = 5.974 \cdot 10^{24} \cdot kg$, der Erdradius $r_E = 6.371 \cdot 10^6 \cdot m$ und die Gravitationskonstente $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$.

Teilaufgabe 1.1.0
Zunächst wird der Satellit mithilfe einer dreistufigen Trägerrakete auf eine Kreisbahn, die so genannte Parkbahn, in der Höhe $h_1 = 430 \cdot km$ über der Erdoberfläche gebracht. Beim Start haben die Trägerrakete und der Satellit die Gesamtmasse $m = 2.80 \cdot 10^3 \cdot t$. Durch Zünden der 1. Stufe hebt die Rakete mit dem Satelliten in vertikaler Richtung von der Erdoberfläche ab. Dabei werden Verbrennungsgase ausgestoßen, so dass die Trägerrakete eine Schubkraft $\vec{F_S}$ mit dem Betrag $F_S = 32.0 \cdot 10^6 \cdot N$ erfährt.

Teilaufgabe 1.1.1 (3 BE)
Berechnen Sie den Betrag a_0 der Anfangsbeschleunigung $\vec{a_0}$, mit der die Rakete von der Erde abhebt.

Auf die Rakete mit dem Satelliten wirken die Gewichtskraft $\vec{F_G}$ und die nach oben gerichtete Schubkraft $\vec{F_S}$. Die resultierende Kraft $\vec{F}$ wirkt als beschleunigende Kraft. Für die Beträge gilt:

$$F = F_S - F_G \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot a_0 = F_S - m \cdot g \qquad a_0 = \frac{F_S}{m} - g$$

$$a_0 := \frac{32.0 \cdot 10^6 \cdot N}{2.80 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot kg} - 9.81 \cdot \frac{m}{s^2} \qquad a_0 = 1.62 \frac{m}{s^2}$$

Teilaufgabe 1.1.2 (5 BE)
Durch Zünden der 2. und 3. Stufe wird die Rakete mit dem Satelliten auf die Parkbahn gelenkt. Auf dieser Umlaufbahn bewegt sich der Satellit, nachdem er von der Trägerrakete abgekoppelt wurde, antriebslos mit der Bahngeschwindigkeit $\vec{v_1}$ und der Umlaufdauer T_1. berechnen Sie mithilfe des Gravitationsgesetzes den Betrag v_1 der Bahngeschwindigkeit $\vec{v_1}$ und die Umlaufdauer T_1.
[Teilergebnis: $T_1 = 1.55 \cdot h$]

Die Gravitationskraft $\vec{F_{grav,1}}$, welche die Erde auf die Rakete mit dem Satelliten der (Masse m_S) ausübt, ist die für die Bewegung auf der Kreisbahn mit dem Radius $r_1 = r_E + h_1$ notwendige Zentralkraft $\vec{F_{Z,1}}$.

Für die Beträge gilt: $F_{grav,1} = F_{Z,1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{G \cdot m_S \cdot m_E}{r_1^2} = \frac{m_S \cdot v_1^2}{r_1}$

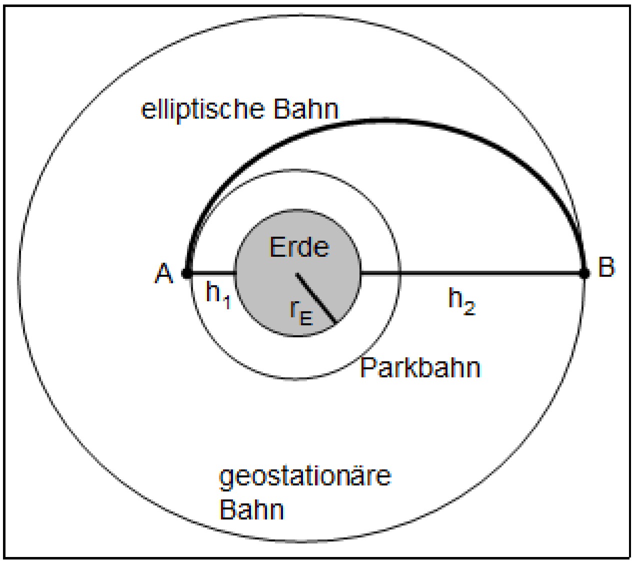
$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r_1}} = \sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r_E + h_1}} \qquad v_1 := \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5.974 \cdot 10^{24} \cdot kg}{6.371 \cdot 10^6 \cdot m + 430 \cdot 10^3 \cdot m}}$$

$$v_1 = 7.66 \times 10^3 \, \frac{m}{s}$$

$$v = \omega \cdot r = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_1}{v_1}$$

$$T := \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(6.371 \cdot 10^6 \cdot m + 430 \cdot 10^3 \cdot m\right)}{7.66 \times 10^3 \, \frac{m}{s}} \qquad T = 5.579 \times 10^3 \, s \qquad T = 1.55 \cdot h$$

Teilaufgabe 1.2.0 (5 BE)
Der Satellit wird in einem Punkt A der Parkbahn durch ein geeignetes, kurzzeitiges Steuermanöver auf eine elliptische Bahn gelenkt. Im erdfernsten Punkt B dieser elliptischen Bahn befindet sich der Satellit in der Höhe $h_2 = 35.79 \cdot 10^6 \cdot m$ über der Erdoberfläche.



Teilaufgabe 1.2.1 **(5 BE)**
Der Satellit fliegt nach dem Steuermanöver antriebslos auf der elliptischen Bahn von A nach B. Berechnen Sie die große Halbachse a der elliptischen Bahn und die Dauer t_{AB} des Fluges von A nach B.
[Teilergebnis: $a = 24.5 \cdot 10^3 \cdot km$]

große Halbachse über Geometrie: $2 \cdot a = h_1 + 2 \cdot r_E + h_2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \cdot (h_1 + 2 \cdot r_E + h_2)$

$$a := \frac{1}{2} \cdot \left(430 \cdot 10^3 \cdot m + 2 \cdot 6.371 \cdot 10^6 \cdot m + 35.79 \cdot 10^6 \cdot m\right) \qquad a = 2.448 \times 10^7 \, m$$

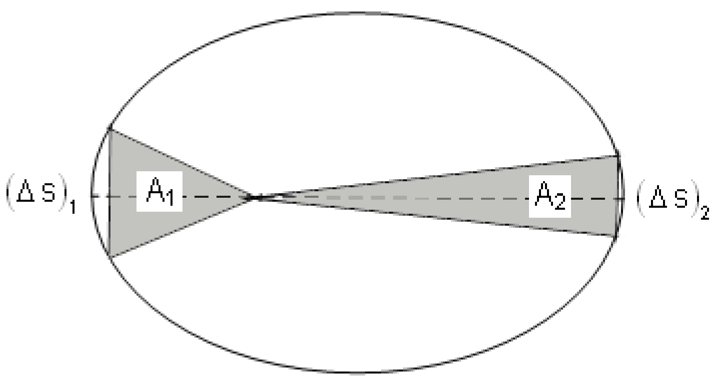
3. Kepler'sches Gesetz: $\frac{(2 \cdot t_{AB})^2}{a^3} = \frac{T_1^{\,2}}{(r_E + h_1)^3}$

Auflösen: $t_{AB} = \frac{1}{2} \cdot T_1 \cdot \sqrt{\frac{a^3}{(r_E + h_1)^3}}$

$$t_{AB} := \frac{1}{2} \cdot 5.579 \times 10^3 \, s \cdot \sqrt{\frac{\left(2.448 \times 10^7 \, m\right)^3}{\left(6.371 \cdot 10^6 \cdot m + 430 \cdot 10^3 \cdot m\right)^3}} \qquad t_{AB} = 1.905 \times 10^4 \, s \qquad t_{AB} = 5.29 \cdot h$$

Teilaufgabe 1.2.2 **(6 BE)**
Der Satellit verlässt die Parkbahn im Punkt A mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_A$, die der Betrag $v_A = 10.05 \cdot \frac{km}{s}$ hat. Die Geschwindigkeit $\vec{v}_B$, mit der der Satellit den Punkt B erreicht, hat den Betrag v_B.
Zeigen Sie durch eine allgemeine Herleitung, dass gilt: $(r_E + h_1) \cdot v_A = (r_E + h_2) \cdot v_B$, und berechnen Sie v_B mithilfe dieser Gleichung.

Nach dem 2. Kepler'schen Gesetz gilt, dass der Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht:
Im Zeitintervall Δt wird also am Punkt A der Bogen $(\Delta s)_1$ und am Punkt B der Bogen $(\Delta s)_2$ zurückgelegt. Nimmt man nun ein sehr kleines Zeitintervall Δt, so kann der Bogen durch die jeweilige Sekante angenähert werden. Die Fläche des Dreiecks kann elementar berechnet werden.



Es gilt: $A_1 = A_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\Delta s_1\cdot\left(r_E + h_1\right) = \frac{1}{2}\cdot\Delta s_2\cdot\left(r_E + h_2\right)$

Es wird angenommen, dass die Bahngeschwindigkeit im sehr kleinen Zeitintervall Δt konstant ist.

$\Delta s_1 = v_A\cdot\Delta t$ und $\Delta s_2 = v_B\cdot\Delta t$ einsetzen:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(v_A\cdot\Delta t\right)\cdot\left(r_E + h_1\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(v_B\cdot\Delta t\right)\cdot\left(r_E + h_2\right)$$

Vereinfachen: $v_A\cdot\left(r_E + h_1\right) = v_B\cdot\left(r_E + h_2\right)$

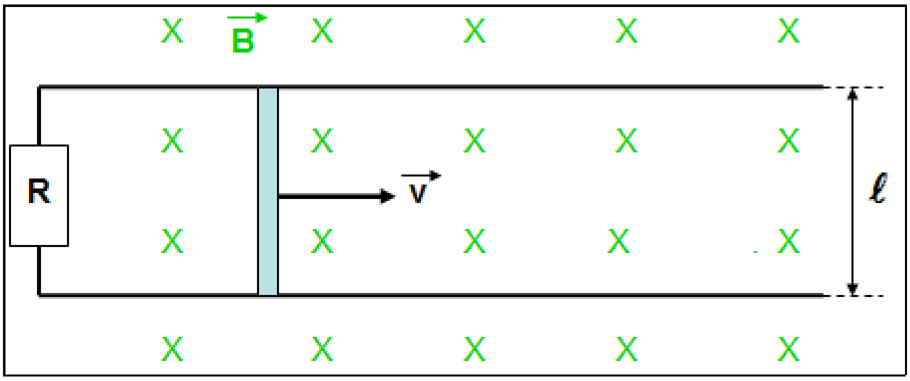
Auflösen nach v_B: $v_B = \frac{r_E + h_1}{r_E + h_2}\cdot v_A$

$$v_B := \frac{6.371\cdot 10^6\cdot m + 430\cdot 10^3\cdot m}{6.371\cdot 10^6\cdot m + 35.79\cdot 10^6\cdot m}\cdot 10.05\cdot 10^3\cdot\frac{m}{s} \qquad v_B = 1.62\times 10^3\,\frac{m}{s} \qquad v_B = 1.62\cdot\frac{km}{s}$$

Teilaufgabe 1.2.3 (3 BE)
Im Punkt B wird der Satellit durch ein weiteres Steuemanöver von der elliptischen Bahn auf die geostationäre Kreisbahn in der Höhe h_2 über der Erdoberfläche gelnkt. Auf dieser Kreisbahn bewegt sich der Satellit mit der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_G$, deren Betrag v_G größer als v_B ist, um die Erde. Erläutern Sie dieses Steuermanöver und geben Sie an, wie dieses Steuermanöver bewerkstelligt werden kann.

Im höchsten Punkt B der elliptischen Bahn mit der Höhe h_2 über der Erdoberfläche wird der Satellit in Bewegungsrichtung (in tangentialer Richtung zur Flugbahn des Satelliten) von der Geschwindigkeit $\vec{v}_B$ mit dem Betrag v_B auf eine Geschwindigkeit $\vec{v}_G$ beschleunigt, deren Betrag v_G so groß ist, wie es für die Kreisbahn mit der Bahnhöhe h_2 nötig ist.
Dieses Steuermanöver lässt sich bewerkstelligen, indem von einer kleinen Antriebsrakete Treibgas entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung ausgestoßen wird (Impulserhaltungssatz).

Teilaufgabe 2.0
In unten stehender Skizze ist eine Versuchsanordnung in einer Draufsicht dargestellt. In einem homogenen Magnetfeld, dessen Flussdichte $\vec{B}$ zeitlich konstant ist und den Betrag $B = 900 \cdot mT$ hat, befindet sich ein rechtsseitig offener Metallbügel. Der ohmsche Widerstand im linken Teil des Metallbügels hat den Wert $R = 0.80 \cdot \Omega$. Auf dem Metallbügel wird ein Leiterstück der Länge $l_0 = 25 \cdot cm$ zunächst mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ nach rechts verschoben. Die Geschwindigkeit $\vec{v_0}$ ist senkrecht zur Flussdichte $\vec{B}$ gerichtet und hat den Betrag $v_0 = 16 \cdot \frac{cm}{s}$.
Die Leitungswiderstände von Bügel und Leiterstück sowie die Kontaktwiderstände zwischen dem Leiterstück und dem Metallbügel sind gegenüber dem Widerstand $R = 0.80 \cdot \Omega$ vernachlässigbar. Das Leiterstück befindet sich während der betrachteten Vorgänge stets im Magnetfeld.



Teilaufgabe 2.1 **(4 BE)**
Bei der Bewegung des Leiterstücks fließt durch den geschlossenen Kreis ein Induktionsstrom. Berechnen Sie die Stärke J des Induktionsstroms.

$R = \frac{|U_i|}{J} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{|U_i|}{R} \qquad |U_i| = B \cdot l_0 \cdot v_0$ einsetzen:

$$J = \frac{B \cdot l_0 \cdot v_0}{R} \qquad J := \frac{900 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{V \cdot s}{m^2} \cdot 0.25 \cdot m \cdot 0.16 \cdot \frac{m}{s}}{0.80 \cdot \frac{V}{A}} \qquad J = 0.045 \cdot A$$

Teilaufgabe 2.2.0
Die bei der Verschiebung des Leiterstücks zwischen dem Leiterstück und dem Metallbügel auftretende Reibung ist vernachlässigbar. Dennoch muss zur Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit $\vec{v_0}$ eine Zugkraft $\vec{F_{Zug}}$ auf das Leiterstück ausgeübt werden.

Teilaufgabe 2.2.1 **(5 BE)**
Erläutern Sie, warum diese Kraft $\vec{F_{Zug}}$ notwendig ist, und bestätigen Sie durch eine allgemeine Rechnung, dass für den Betrag F_{Zug} der Zugkraft $\vec{F_{Zug}}$ gilt: $F_{Zug} = \frac{B^2 \cdot l^2}{R} \cdot v_0$

Begründung Variante 1:

Die mit $\vec{v}$ bewegten Elektronen im $\vec{B}$ - Feld erfahren die Lorentzkraft $\vec{F_L} = -e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Auf Grund der linken Handregel (negativen Ladungen) ist diese Kraft nach unten gerichtet. Der Strom (technische Stromrichtung) fließt somit bei geschlossenem Stromkreis nach oben.

Der vom Strom J durchflossene Leiter $\vec{l_0}$ erfährt die Kraft $\vec{F_J} = J \cdot \vec{l_0} \times \vec{B}$. Nach der rechten Handregel ist diese Kraft der Geschwindigkeit $\vec{v}$ entgegengerichtet. Um die Bewegung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ aufrecht zu erhalten, muss eine mechanische Kraft . $\vec{F_{mech}} = -\vec{F_J}$ aufgewendet werden.

Begründung Variante 2:

Lenz´sche Regel glänzend bestätigt: Ein Induktionsstrom ist stets so gerichtet, dass er den Vorgang, der die Induktion verursacht, behindert.

Der Induktionsstrom J erzeugt ein um den Leiter konzentrisches $\vec{B_J}$ -Feld. Dieses Magnetfeld ist nach der rechten-Handregel (Daumen - J, $\vec{B_J}$ - Feld übrige Finger) so gerichtet, dass rechts vom Leiter die beiden Magnetfelder sich verstärken und links davon schwächen. Der Leiter erfährt eine Kraft $\vec{F_J}$ in Richtung des schwächeren Magnetfeldes, also nach links. Somit ist zur Aufrechterhaltung der Bewegung eine Kraft $\vec{F_{mech}} = -\vec{F_J}$ aufzuwenden. Der Strom (technische Stromrichtung) fließt somit bei geschlossenem Stromkreis nach oben.

$F_{Zug} = F_J$ mit $F_J = B \cdot l_0 \cdot J$ und $J = \dfrac{B \cdot l_0 \cdot v_0}{R}$

einsetzen: $F_{Zug} = B \cdot l_0 \cdot \dfrac{B \cdot l_0 \cdot v_0}{R} = \dfrac{B^2 \cdot l_0^2}{R} \cdot v_0$

Teilaufgabe 2.2.2 (5 BE)

In einem Zeitintervall mit der Länge $\Delta t = 5.0 \cdot s$ wird am Leiterstück durch die Zugkraft $\vec{F_{Zug}}$ die mechanische Arbeit W_{mech} verrichtet.

Berechnen Sie W_{mech} und erläutern Sie, was mit der dem Leiterstück zugeführten Energie im Stromkreis geschieht.

$$W_{mech} = F_{Zug} \cdot v_0 \cdot \Delta t = \frac{B^2 \cdot l_0^2}{R} \cdot v_0^2 \cdot \Delta t$$

$$W_{mech} := \frac{\left(900 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{V \cdot s}{m^2}\right)^2 \cdot (0.25 \cdot m)^2}{0.80 \cdot \frac{V}{A}} \cdot \left(0.16 \cdot \frac{m}{s}\right)^2 \cdot 5.0 \cdot s \qquad W_{mech} = 8.1 \times 10^{-3} J$$

Einheitenumrechnung: $\dfrac{V^2 \cdot s^2 \cdot m^2 \cdot A \cdot m^2 \cdot s}{V \cdot s^2 \cdot m^4} = A \cdot V \cdot s$

Die Verschiebungsarbeit W_{mech} wird im Stromkreis in elektrische Energie umgesetzt, die dann im Widerstand R in Wärme umgewandelt wird.

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)

Das mit der Geschwindigkeit $\vec{v_0}$ bewegte Leiterstück wird zum Zeitpunkt t_L losgelassen, d. h. die Zugkraft $\overrightarrow{F_{Zug}}$ wird nicht mehr ausgeübt. Das Leiterstück erfährt nun eine Verzögerung $\vec{a}$ mit dem Betrag a, so, dass der Betrag v seiner Geschwindigkeit $\vec{v}$ abnimmt.

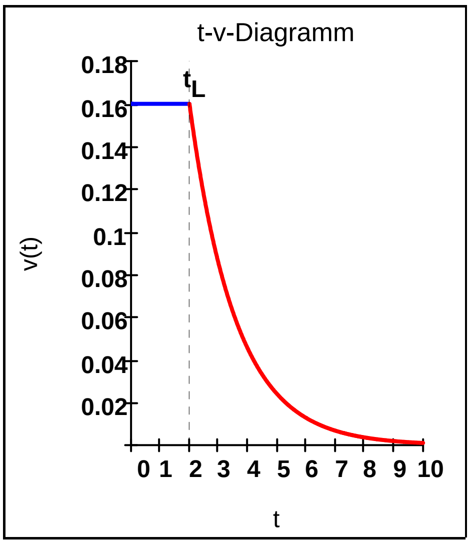
Begründen Sie mithilfe des Ergebnisses von Aufgabe 2.2.1, dass a für $t > t_L$ direkt proportional zu v ist, und skizzieren Sie für $t > t_L$ ein zugehöriges t-v-Diagramm.

Zur Aufrechterhaltung der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v_0}$ ist eine Kraft $\overrightarrow{F_{Zug}}$ erforderlich, für die gilt: $\overrightarrow{F_{Zug}} = -\vec{F_J}$ (siehe 2.2.1).

Fehlt nun die Zugkraft, dann bewegt sich der Leiter auf Grund seiner Trägheit noch weiter, allerdings wird diese Bewegung durch die nach links gerichtete Kraft $\vec{F_J}$ abgebremst. Da die Kraft F_J proportional zur Geschwindigkeit $-v$ ist, wird diese Kraft betragsmäßig abnehmen und damit auch die nach links gerichtete Beschleunigung. Für die Verzögerung gilt nun:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F_J}}{m_L} \qquad \text{mit } F_J = \left|\vec{F_J}\right| = -\left(\frac{B^2 \cdot l_0^2}{R} \cdot v\right) \qquad \text{ergibt sich:} \qquad a = -\left(\frac{B^2 \cdot l_0^2}{m_L \cdot R} \cdot v\right)$$

B, l_0, m_L und R sind zeitlich konstante und von v unabhängige Größen. $\Rightarrow$ $a \sim v$.



Ausführliche Herleitung vgl. Anhang

Die Beschleunigung nimmt ab, also nimmt die Steigung von a(t) ab und geht gegen 0, also muss die Geschwindigkeit abnehmen und ebenfalls gegen 0 gehen.

Teilaufgabe 3.0

Die Flussdichte $\vec{B_E}$ des Magnetfeldes der Erde ist ortsabhängig. Mithilfe einer flachen Spule der Windungszahl N und der Querschnittsfläche A_0, die um eine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gedreht werden kann, wird der Betrag B_E der Flussdichte $\vec{B_E}$ an einem Ort auf der Erdoberfläche bestimmt. Die Rotationsachse ist senkrecht zu $\vec{B_E}$ ausgerichtet.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0 \cdot s$ ist der magnetische Fluss Φ durch die Spule maximal.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Geben Sie eine Gleichung an, die den zeitlichen Verlauf des magnetischen Flusses Φ beschreibt, und leiten Sie daraus mithilfe des Induktionsgesetzes eine Gleichung für den zeitlichen Verlauf der an den Enden der Spule auftretenden Wechselspannung U her.

$\Phi(t) = \Phi_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ mit $\Phi_{max} = A_0 \cdot B_E$ $\Rightarrow$ $\Phi(t) = A_0 \cdot B_E \cdot \cos(\omega \cdot t)$

$$U_i(t) = -N \cdot \left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right) = -N \cdot A_0 \cdot B_E \cdot (-\sin(\omega \cdot t) \cdot \omega) = N \cdot A_0 \cdot B_E \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) = U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Bei 50 Umdrehungen pro Sekunde tritt zwischen den Enden der flachen Spule ($N = 2000$; $A_0 = 1.6 \cdot dm^2$) eine Spannung U mit dem Scheitelwert $U_0 = 0.50 \cdot V$ auf.

Berechnen Sie B_E.

$$U_0 = U_{max} = N \cdot A_0 \cdot B_E \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad B_E = \frac{U_0}{N \cdot A_0 \cdot \omega} = \frac{U_0}{N \cdot A_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

$$B_E := \frac{0.50 \cdot V}{2000 \cdot 1.6 \cdot 10^{-2} \cdot m^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 s^{-1}} \qquad B_E = 5.0 \times 10^{-5} T$$

Anhang zu Teilaufgabe 2.3

Gegeben: $l_0 := 0.25 \cdot m$ $\quad v_0 := 16 \cdot \frac{cm}{s}$ $\quad R := 0.80 \cdot \frac{V}{A}$ $\quad B := 900 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{V \cdot s}{m^2}$

da m_L nicht gegeben ist, wird angenommen: $m_L := 100 \cdot 10^{-3} \cdot kg$

Für den Betrag von a gilt nach 2.3: $a = \frac{B^2 \cdot l_0^2}{m_L \cdot R} \cdot v$ $\quad a = const \cdot v$

Berechnung der Konstanten: $\quad const := \dfrac{B^2 \cdot l_0^2}{m_L \cdot R} \qquad const = 0.633\,\dfrac{1}{s}$

Für eine Herleitung ist mit Vorzeichen sauber zu rechnen:

Differentialgleichung: $\quad a = -const \cdot v \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dv}{dt} = -const \cdot v$

Trennen der Variablen: $\quad \dfrac{dv}{v} = -const \cdot t$

Integrieren: $\quad \displaystyle\int \frac{1}{v}\, dv = \int -const\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln(|v|) = -const \cdot t + k$

Auflösen: $\quad v = e^{-const \cdot t + k} = e^k \cdot e^{-const \cdot t}$

Bestimmung von k: $\quad$ Für $t = 0$ ist $v = v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = e^k$

Allgemeine Lösung: $\quad \boxed{v = v_0 \cdot e^{-const \cdot t}}$

Herleitung für den zurückgelegten Weg:

$$s = v_0 \cdot \int e^{-const \cdot t}\, dt \quad \Rightarrow \quad s = \frac{-v_0}{const} \cdot e^{-const \cdot t} + k1$$

Bestimmung von k1:

für $t = 0$ ist $s = 0 \quad 0 = \dfrac{-v_0}{const} + k1 \quad \Rightarrow \quad k1 = \dfrac{v_0}{const}$

$$s = \frac{-v_0}{const} \cdot e^{-const \cdot t} + \frac{v_0}{const}$$

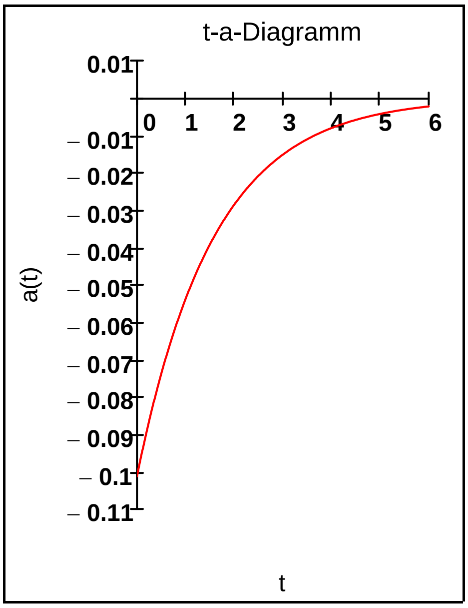
also: $\quad \boxed{s = \dfrac{v_0}{const} \cdot \left(1 - e^{-const \cdot t}\right)} \qquad s_0 := \dfrac{v_0}{const} = 0.253\,m$

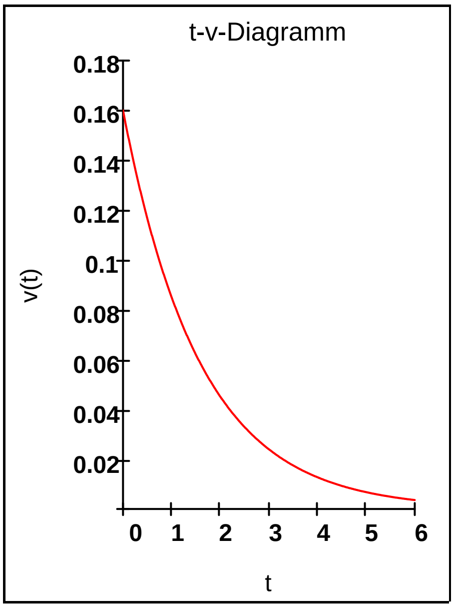
graphische Darstellung ab dem Zeitpunkt t_L:

$a(t) = -const \cdot v(t) = -a_0 \cdot e^{-const \cdot t}$

$v(t) := v_0 \cdot e^{-const \cdot t}$

mit $a_0 = const \cdot v_0$





$s_L(t) := s_0 \cdot \left(1 - e^{-const \cdot t}\right)$