Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 12 Technik - A I - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{x^2 - 4\cdot x + 4}{x^2 + 4\cdot x + 4}\right)$ mit der maximalen Definitionsmenge D_f. Der Graph von f wird mit D_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_f.

$$f(x) := \frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{x^2 - 4\cdot x + 4}{x^2 + 4\cdot x + 4}\right)$$

Zähler $\neq 0$ $\qquad x^2 - 4\cdot x + 4 = 0$ auflösen, x $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x \neq 2$

Nenner $\neq 0$ $\qquad x^2 + 4\cdot x + 4 = 0$ auflösen, x $\rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x \neq -2$

Argument positiv: $\qquad \frac{x^2 - 4\cdot x + 4}{x^2 + 4\cdot x + 4} > 0$ auflösen, x $\rightarrow 2 < x \vee x < -2 \vee -2 < x < 2$

Definitionsmenge: $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{ -2 \;;\; 2 \}$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Berechnen Sie **ohne CAS** die Nullstelle von f.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 4\cdot x + 4}{x^2 + 4\cdot x + 4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4\cdot x + 4 = x^2 + 4\cdot x + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 8\cdot x \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 0$$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Zeigen Sie **ohne CAS**, dass G_f punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft.

$$f(-x) = \frac{1}{4}\cdot\ln\left[\frac{(-x)^2 - 4\cdot(-x) + 4}{(-x)^2 + 4\cdot(-x) + 4}\right] = \frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{x^2 + 4\cdot x + 4}{x^2 - 4\cdot x + 4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\ln\left(x^2 + 4\cdot x + 4\right) - \ln\left(x^2 - 4\cdot x + 4\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{4}\cdot\left(\ln\left(x^2 - 4\cdot x + 4\right) - \ln\left(x^2 + 4\cdot x + 4\right)\right) = \frac{-1}{4}\cdot\ln\left(\frac{x^2 - 4\cdot x + 4}{x^2 + 4\cdot x + 4}\right) = -f(x)$$

Teilaufgabe 1.4 (2 BE)
Bestimmen Sie das Verhalten von f(x) bei Annäherung von x an die Definitionslücken.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \to -\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) \to -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) \to \infty \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) \to \infty$$

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)
Bestimmen Sie **ohne CAS** das Verhalten von f(x) für $|x| \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \right) \to 1$$ da Zählergrad = Nennergrad

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \right) \right) \to 0$$

Symmetrie: $$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{x^2 + 4 \cdot x + 4} \right) \right) \to 0$$

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.
[Mögliches Teilergebnis: $\mathbf{f'(x) = \frac{2}{x^2 - 4}}$]

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \text{ vereinfachen } \to \frac{2}{x^2 - 4}$$

$$f'(x) > 0 \text{ auflösen}, x \to 2 < x \vee x < -2$$

$$f'(x) < 0 \to \frac{2}{x^2 - 4} < 0 \text{ auflösen}, x \to -2 < x < 2$$

G_f ist streng monoton steigend in $]-\infty; -2[$, G_f ist streng monoton fallend in $]-2; 2[$, und
G_f ist streng monoton steigend in $]2; \infty[$,

Teilaufgabe 1.7 (6 BE)
Bestimmen Sie **ohne CAS** die maximalen Krümmungsintervalle von f und die Koordinaten des Wendepunkts von G_f.

$$f'(x) = 2\cdot\left(x^2-4\right)^{-1} \qquad f''(x) = 2\cdot(-1)\cdot\left(x^2-4\right)^{-2}\cdot 2\cdot x = \frac{-4\cdot x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4\cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

		$x \neq -2$		$x = 0$		$x \neq 2$	
Zähler	pos		pos		neg		pos
Nenner	pos		pos		pos		pos
f ''(x)	pos		pos		neg		neg
G_f	lk		lk	WP	rk		rk

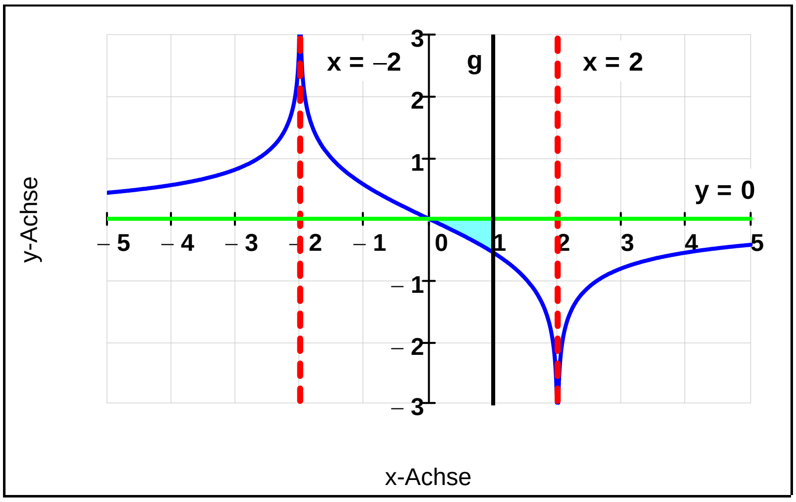
G_f ist linksgekrümmt in $]\,-\infty\,;\,-2\,[$ und G_f ist linksgekrümmt in $]\,-2\,;\,0\,]$,
G_f ist rechtsgekrümmt in $[\,0\,;\,2\,[$ und G_f ist rechtsgekrümmt in $]\,2\,;\,\infty\,]$.

$$f(0) = \frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WP}(0/0)$$

Teilaufgabe 1.8 (8 BE)
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von f zusammen mit seinen Asymptoten für $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm

senkrechte Asymptoten: $x = -2$ $x = 2$

waagrechte Asymptote: $y = 0$



x1 =	f(x1) =
0	0
1	-0.5
1.5	-1
2.5	-1.1
3	-0.8
4	-0.5
5	-0.4

Teilaufgabe 1.9.0
Im vierten Quadranten schließt G_f zusammen mit der x-Achse und der senkrechten Geraden g mit der Gleichung $x = u$ mit $0 < u < 2$ ein Flächenstück ein.

Teilaufgabe 1.9.1 (2 BE)
Ergänzen Sie in der Zeichnung aus 1.7 die Gerade g für $u = 1$ und markieren Sie das beschriebene Flächenstück.

Teilaufgabe 1.9.2 (6 BE)

Gegeben ist die Funktion F mit $F(x) = -\ln(2-x) - \ln(2+x) + x\cdot\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{x^2-4\cdot x+4}{x^2+4\cdot x+4}\right)$ mit

$D_F = [\,0\,;\,2\,]$. Zeigen Sie **ohne CAS**, das F für $x \in D_F$ eine Stammfunktion von f ist.

$$F(x) = -\ln(2-x) - \ln(2+x) + x\cdot\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{x^2-4\cdot x+4}{x^2+4\cdot x+4}\right) = -\ln(2-x) - \ln(2+x) + x\cdot f(x)$$

$$F'(x) = \frac{-1}{2-x}\cdot(-1) - \frac{1}{2+x} + 1\cdot f(x) + x\cdot f'(x) = \frac{2+x-(2-x)}{(2-x)\cdot(2+x)} + f(x) + x\cdot\frac{2}{x^2-4}$$

$$= \frac{-(2\cdot x)}{x^2-4} + f(x) + x\cdot\frac{2}{x^2-4} = f(x)$$

Teilaufgabe 1.9.3 (5 BE)

Ermitteln Sie unter Verwendung der Funktion F die Flächenmaßzahl A(u) des Flächenstücks aus 1.9.0 in Abhängigkeit von u und bestimmen Sie auf zwei Nachkommastellen gerundet den Wert des Parameters u so, dass $A(u) = 1$ ist.

$$F(x) := -\ln(2-x) - \ln(2+x) + x\cdot\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{x^2-4\cdot x+4}{x^2+4\cdot x+4}\right)$$

$$A(u) := -(F(u) - F(0)) \xrightarrow{\text{CAS}} \ln(u+2) - 2\cdot\ln(2) + \ln(2-u) - \frac{u\cdot\ln\left(\frac{u^2-4\cdot u+4}{u^2+4\cdot u+4}\right)}{4}$$

$A(u) = 1$ **auflösen**, $u \rightarrow 1.8072450166255842709$ $\qquad u = 1.80$

Teilaufgabe 2.0
In einem Fluss nimmt das Wasser beim Fließen Sauerstoff aus der Luft auf. Außerdem wird im Wasser Sauerstoff durch bestimmte Arten von Algen in Abhängigkeit von der Sonnenlichteinstrahlung produziert. Gleichzeitig wird während des ganzen Tages Sauerstoff von allen Organismen im Wasser verbraucht.

An einer bestimmten Messstelle ändert sich die Sauerstoffkonzentration k(t) in $\frac{mg}{l}$ des Flusswassers im Verlauf eines Tages sinusförmig mit der Periodendauer $T = 24 \cdot h$. Der Verlauf kann näherungsweise durch $k(t) = a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$ beschrieben werden, wobei t mit $0 \le t \le 24$ die seit 0 Uhr verstrichene Zeit in Stunden beschreibt.

Kontinuierliche Messungen über einen ganzen Tag hinweg ergaben das Minimum der Sauerstoffkonzentration im Wasser von $4.20 \cdot \frac{mg}{l}$ um 4.00 Uhr morgens und das Maximum von $11.8 \cdot \frac{mg}{l}$ um 16.00 Uhr am Nachmittag.
Auf das Mitführen von Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Geben Sie mit Begründung einen geeigneten Funktionsterm an und skizzieren Sie das Schaubild dazu.
[Mögliches Teilergebnis: $k(t) = 3.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + 8$]

Amplitude: $a := \frac{11.8 - 4.2}{2} = 3.8$

Verschiebung: $d := 4.2 + \frac{11.8 - 4.2}{2} = 8$

Winkelgeschw. : $b := \frac{2 \cdot \pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

$t_{min} := 4$ $\quad t_{max} := 16$ $\quad t_0 := 4 + \frac{16 - 4}{2} = 10$

Tiefpunkt (4/4,2) einsetzen:

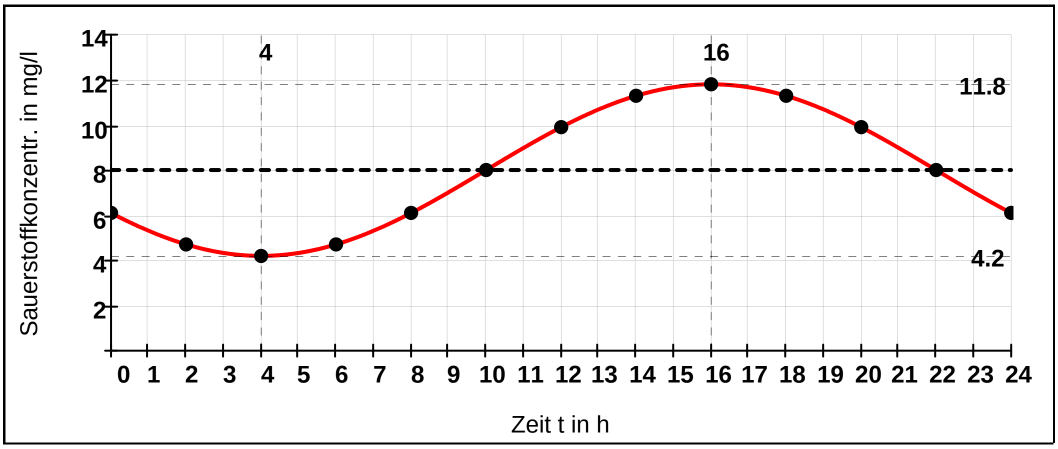
$$3.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 4 + c\right) + 8 = 4.2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 4 + c\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{12} \cdot 4 + c = \frac{3}{2} \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad c := \frac{3}{2} \cdot \pi - \frac{1}{3} \cdot \pi = \frac{7 \cdot \pi}{6}$$

$$k(t) = 3.8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t + \frac{7 \cdot \pi}{6}\right) + 8$$

$$k(t) := \frac{38}{10} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t - \frac{5 \cdot \pi}{6}\right) + 8$$

t1 =	k(t1) =
0	6.1
2	4.7
4	4.2
6	4.7
8	6.1
10	8
12	9.9
14	11.3
16	11.8
18	11.3
20	9.9
22	8
24	6.1



Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der die Abnahme der Sauerstoffkonzentration am größten war. Auf eine Untersuchung an den Rändern des Beobachtungszeitraumes kann dabei verzichtet werden.

1. Ableitung: $$k'(t) := \frac{d}{dt}k(t) = \frac{19\cdot\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{12} - \frac{5\cdot\pi}{6}\right)}{60}$$

2. Ableitung: $$k''(t) := \frac{d^2}{dt^2}k(t) = -\frac{19\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{12} - \frac{5\cdot\pi}{6}\right)}{720}$$

Wendestelle: $k''(t) = 0$ $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t - \frac{5\cdot\pi}{6}\right) = 0$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t - \frac{5\cdot\pi}{6}\right) = 0 \ \left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, t\\ \text{annehmen}, \text{vollständig}\end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{ll}12\cdot\_n + 10 & \text{if } \_n \in \mathbb{Z}\\ \text{undefined} & \text{otherwise}\end{array}\right.$$

oder per Hand:

$$t_0(n) := \frac{\pi}{12}\cdot t - \frac{5\cdot\pi}{6} = n\cdot\pi \ \text{auflösen}, t \ \rightarrow 12\cdot n + 10$$

Wendestellen, da einfache Nullstellen von $k''(t)$

$t_0(0) = 10$ $\qquad k'(10) = 0.995$ $\qquad$ also Zunahme

$t_0(1) = 22$ $\qquad k'(22) = -0.995$ $\qquad$ also Abnahme

Größte Abnahme um 22 Uhr.

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)
Berechnen Sie **ohne CAS** mittels Integration die mittlere Sauerstoffkonzentration des Flusswassers für den Zeitraum von 0:00 Uhr bis 10:00 Uhr auf eine Nachkommastelle genau.

$$\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} k(t)\,dt = \frac{1}{10}\cdot\int_0^{10}\left(3.8\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t-\frac{5\cdot\pi}{6}\right)+8\right)dt$$

Stammfunktion:

$$K(t) := \int\left(3.8\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t-\frac{5\cdot\pi}{6}\right)+8\right)dt = -3.8\cdot\frac{12}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot t-\frac{5\cdot\pi}{6}\right)+8\cdot t$$

Grenzen einsetzen:

$$M := \frac{1}{10}\cdot\left[-3.8\cdot\frac{12}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot 10-\frac{5\cdot\pi}{6}\right)+8\cdot 10-\left(-3.8\cdot\frac{12}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot 0-\frac{5\cdot\pi}{6}\right)+8\cdot 0\right)\right]$$

$$M = 5.291$$

Die mittlere Sauerstoffkonzentration in der Zeit von 0 Uhr bis 10 Uhr beträgt $5.3\cdot\frac{mg}{l}$.

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Mithilfe des Newton-Verfahrens soll näherungsweise der Zeitpunkt bestimmt werden, zu dem die Sauerstoffkonzentration erstmals den Wert $10.0\cdot\frac{mg}{l}$ erreicht. Benutzen Sie als Startwert **t = 10**, führen Sie zwei Näherungsschritte durch und geben Sie das Ergebnis mit 5 Nachkommastellen genau an.

Bedingung: $k(t) = 10$

Differenzfunktion: $d(t) := k(t) - 10$ $\qquad d'(t) := \frac{d}{dt}d(t)$

Gesucht ist die Nullstelle von d(t)

$$t_0 := 10 \qquad t_1 := t_0 - \frac{d(t_0)}{d'(t_0)} \qquad t_1 = 12.01038$$

$$t_2 := t_1 - \frac{d(t_1)}{d'(t_1)} \qquad t_2 = 12.11624$$

Teilaufgabe 2.5 (2 BE)
Berechnen Sie nun den exakten Zeitpunkt, zu dem die Sauerstoffkonzentration erstmals den Wert $10.0 \cdot \frac{mg}{l}$ erreicht. Geben Sie außerdem den Unterschied zwischen der Näherungslösung aus 2.4 und dem exakten Wert mit 5 Nachkommastellen an.

$$k(t) = 10 \text{ auflösen}, t \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{12 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{10}{19}\right)}{\pi} + 10 \\ 22 - \dfrac{12 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{10}{19}\right)}{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.11712 \\ 19.88288 \end{pmatrix}$$ Lösung

$$t_{exakt} := \frac{12 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{10}{19}\right)}{\pi} + 10$$

Unterschied: $\left| t_2 - t_{exakt} \right| = 0.00088$