Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 12 Technik - A II - Lösung mit CAS**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind mit $a \in \mathbb{R}$ die reellen Funktionen f_a mit $f_a(x) = 1 - \frac{(1-a)\cdot x + a^2}{x^2 + (1-a)\cdot x}$ in der jeweils größtmöglichen Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,;\, a - 1 \,\}$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Zeigen Sie **ohne CAS**, dass gilt: $f_a(x) = \frac{(x+a)\cdot(x-a)}{x\cdot(x+1-a)}$.

$$f_a(x) = 1 - \frac{(1-a)\cdot x + a^2}{x^2 + (1-a)\cdot x} = \frac{x^2 + (1-a)\cdot x - (1-a)\cdot x - a^2}{x\cdot[x + (1-a)]} = \frac{x^2 + x - a\cdot x - x + a\cdot x - a^2}{x\cdot(x+1-a)}$$

$$= \frac{x^2 - a^2}{x\cdot(x+1-a)} = \frac{(x+a)\cdot(x-a)}{x\cdot(x+1-a)}$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Begründen Sie, warum der Graph von f_a für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ nicht symmetrisch zum Koordinatenursprung sein kann, und untersuchen Sie für $a = 1$ den Graphen von f_1 auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

$f_a(x)$ enthält im Nenner gerade und ungerade Potenzen von x, die Nullstellen liegen nicht symmetrisch.

$$f_1(x) = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \qquad f_1(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = f_a(x)$$

$\Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art der Definitionslücke von f_a in Abhängigkeit von a.

Zähler: $z(x,a) := (x+a)\cdot(x-a)$

Nenner: $n(x,a) := x\cdot(x+1-a)$

$$f(x,a) = \frac{(x+a)\cdot(x-a)}{x\cdot(x+1-a)}$$

Nullstellen des Zählers: $x_1 = -a \qquad x_2 = a$

Nullstellen des Nenners: $n(x,a) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a-1 \end{pmatrix}$

Nullstelle des Zählers in den Nenner einsetzen:

$$n(-a, a) = 0 \rightarrow a \cdot (2 \cdot a - 1) = 0 \text{ auflösen}, a \;\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$n(a, a) = 0 \rightarrow a = 0 \text{ auflösen}, a \;\rightarrow 0$$

$$f(x, a) := \frac{(x + a)\cdot(x - a)}{x \cdot (x + 1 - a)}$$

$a = 0$ $\qquad f(x, 0) = \frac{x^2}{x \cdot (x + 1)} = \frac{x}{x + 1}$

$x = 0$ stetig behhebbare Def.lücke

$x = -1$ Polstelle

$a = \frac{1}{2}$ $\qquad f\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x}$

$x = \frac{-1}{2}$ stetig behebbare Definitionslücke

$x = 0$ einfache Polstelle

$a = 1$ $\qquad f(x, 1) = \frac{(x + 1)\cdot(x - 1)}{x^2}$

$x = 0$ zweifache Polstelle

$a \in IR \setminus \{ 0 ; \frac{1}{2} ; 1 \}$ $\qquad x = 0 \qquad x = a - 1$ jeweils einfache Polstelle

Teilaufgabe 1.4.0
Für $a = 3$ erhält man die Funktion f_3, die im Folgenden mit f bezeichnet wird, d. h.

$$f(x) = f_3(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2 \cdot x} .$$

Teilaufgabe 1.4.1 (6 BE)
Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte für $f(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$ und in der Nähe der Definitionslücken von f. Geben Sie auch die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.

$$f(x) := \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2 \cdot x} \qquad D_f = IR \setminus \{0; 2\}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \to -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \to \infty$ $\quad$ $x = 0$ senkrechte Asymptote mit VZW

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \to \infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \to -\infty$ $\quad$ $x = 2$ senkrechte Asymptote mit VZW

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to 1$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \to 1$ $\quad$ $y = 1$ waagrechte Asymptote mit VZW

Teilaufgabe 1.4.2 (10 BE)
Untersuchen Sie **ohne CAS** das Monotonieverhalten der Funktion f und ermitteln Sie damit Art und Lage der Extrempunkte des Graphen von f. Runden Sie dabei die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-2 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 18}{\left(x^2 - 2 \cdot x\right)^2}$]

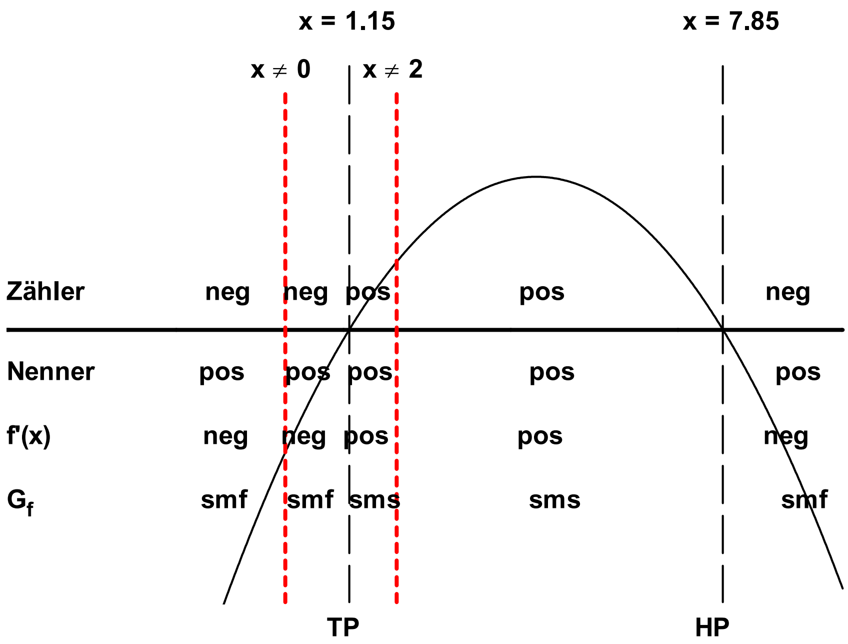
$$f'_a(x) = \frac{2 \cdot x \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x\right) - \left(x^2 - 9\right) \cdot (2 \cdot x - 2)}{\left(x^2 - 2 \cdot x\right)^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{2 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 18}{\left(x^2 - 2 \cdot x\right)^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{-2 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 18}{\left(x^2 - 2 \cdot x\right)^2}$$

Waagrechte Tangenten: $\mathbf{f'(x) = 0}$

$$-2\cdot x^2 + 18\cdot x - 18 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3\cdot\sqrt{5}}{2} + \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} - \frac{3\cdot\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.85 \\ 1.15 \end{pmatrix}$$



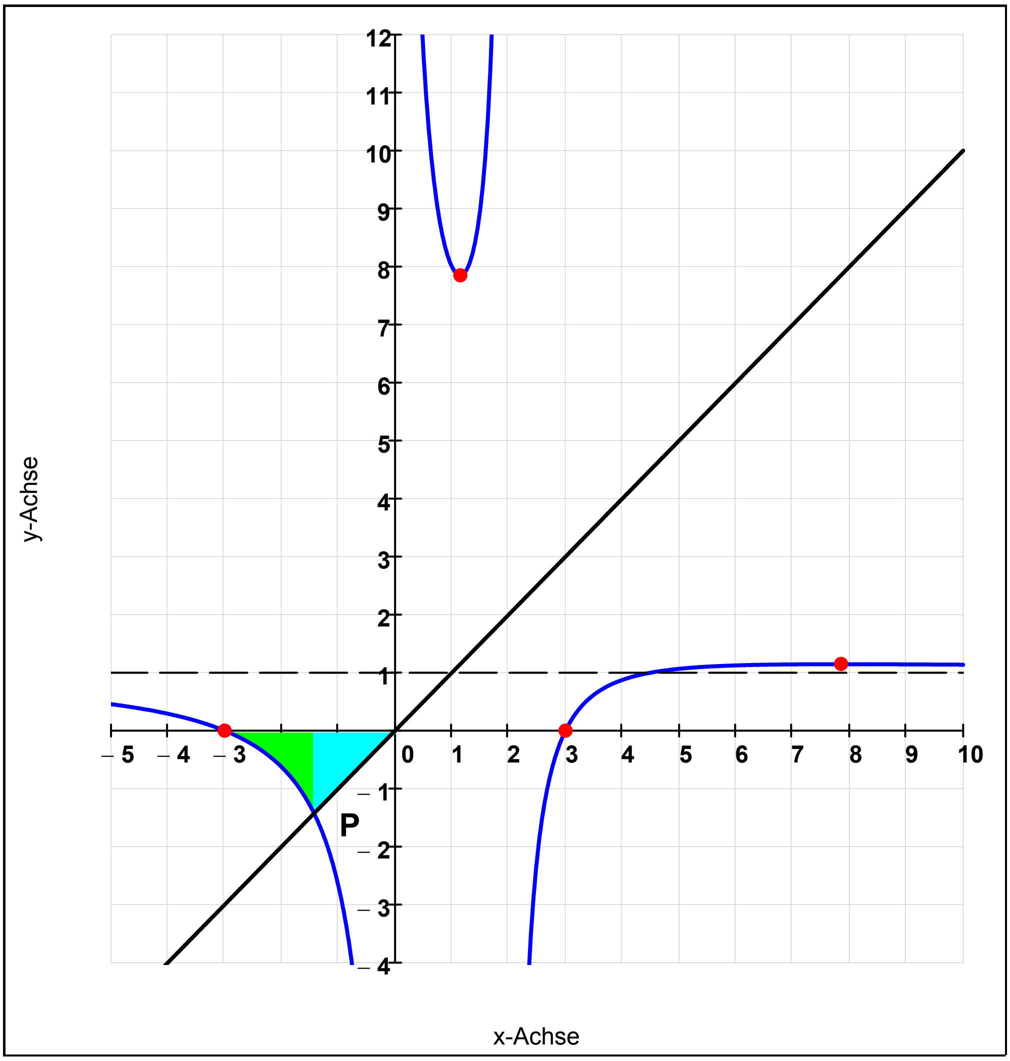
G_f ist streng monoton fallend in $]-\infty\,;\,0\,[$, streng monoton fallend in $]\,0\,;\,1.15\,]$, streng monoton steigend in $[\,1.15\,;\,2\,[$, streng monoton steigend in $]\,2\,;\,7.85\,]$ und streng monoton fallend in $[\,7.85\,;\,\infty\,[$

$f(1.15) = 7.85$ $\qquad$ $TP(1.15, 7.85)$

$f(7.85) = 1.15$ $\qquad$ $HP(7.85, 1.15)$

Teilaufgabe 1.4.3 (6 BE)
Geben Sie die Nullstellen von f an und zeichnen Sie mit Hilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse und geeigneter, zusätzlich berechneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f mit seinen Asymptoten für $-5 \leq x \leq 10$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: 1 LE = 1 cm.

Nullstellen: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 9}{2 \cdot x - x^2} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$



Teilaufgabe 1.4.4 (4 BE)

Gegeben ist die Funktion F mit $F(x) = x - 2.5 \cdot \ln(2 - x) + 4.5 \cdot \ln(-x)$ mit $D_F =]-\infty\,;\,0[$.

Zeigen Sie **ohne CAS**, dass für $x < 0$ die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.

$$F'(x) = 1 - \frac{2.5}{2 - x} \cdot (-1) + \frac{4.5}{-x} \cdot (-1) = \frac{x \cdot (2 - x) + 2.5 \cdot x + 4.5 \cdot (2 - x)}{x \cdot (2 - x)} = \frac{2 \cdot x - x^2 + 2.5 \cdot x + 9 - 4.5 \cdot x}{x \cdot (2 - x)}$$

$$= \frac{-x^2 + 9}{x \cdot (2 - x)} = \frac{x^2 - 9}{x \cdot (x - 2)} = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2 \cdot x} = f(x)$$

Teilaufgabe 1.4.5 (6 BE)

Der Graph von f schneidet die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten im Punkt P. Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens näherungsweise die Koordinaten des Punktes P so genau, dass sich seine x-Koordinate x_P um weniger als 10^{-4} vom Funktionswert $f(x_P)$ unterscheidet.

Beginnen Sie mit dem Startwert $x_0 = -1.5$.

[Ergebnis: P(-1,426 / -1,426)]

$f(x) = x$

Differenzfunktion: $d(x) := f(x) - x = -x - \frac{x^2 - 9}{2 \cdot x - x^2}$

Ableitungsfunktion: $d'(x) := \frac{d}{dx} d(x) = \frac{5}{2 \cdot (x - 2)^2} - \frac{9}{2 \cdot x^2} - 1$

$\text{ORIGIN} := 0$

$z_0 := -1.5 \qquad n := 0 .. 3$

$$z_{n+1} := z_n - \frac{d(z_n)}{d'(z_n)}$$

$n =$	$z_{n+1} =$	$f(z_{n+1}) =$	$d(z_{n+1}) =$
0	-1.42336	-1.43126	$-7.904 \cdot 10^{-3}$
1	-1.42599	-1.42600	$-1.032 \cdot 10^{-5}$
2	-1.42599	-1.42599	$-1.765 \cdot 10^{-11}$
3	-1.42599	-1.42599	0

$-1.032 \cdot 10^{5} < 10^{-4}$

$x_P := -1.4260 \qquad y_P := -1.4260$

Teilaufgabe 1.4.6 (4 BE)
Der Graph der Funktion f, die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten und die x-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück im Schaubild der Aufgabe 1.4.3 und berechnen Sie seine auf zwei Nachkommastellen gerundete Flächenmaßzahl des Ergebnisses aus Aufgabe 1.4.5.

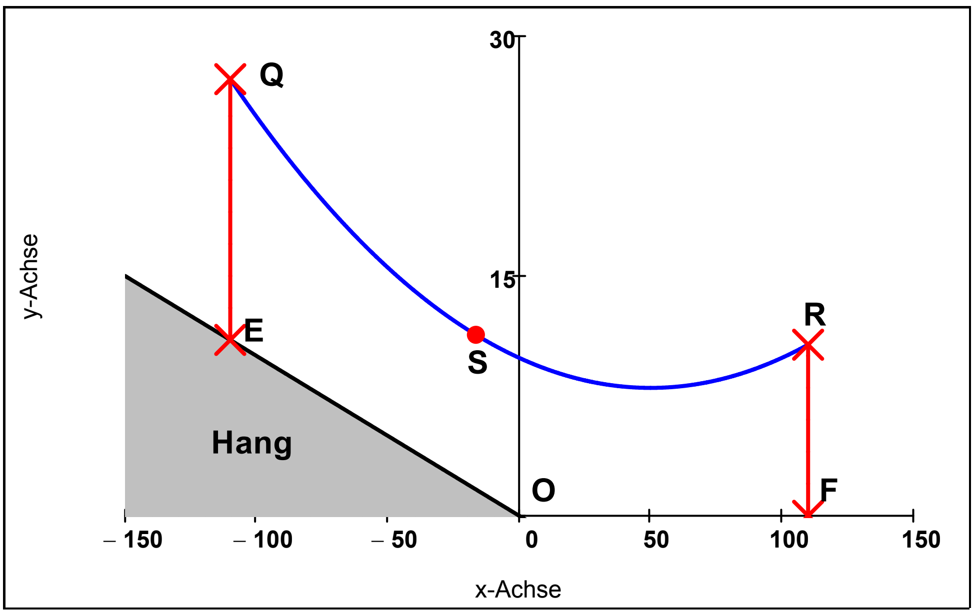
1. Teilfläche: $A_1 := -\int_{-3}^{x_P} f(x)\,dx$ $\qquad A_1 = 0.8277$

2. Teilfläche: $A_2 := -\int_{x_P}^{0} x\,dx$ $\qquad A_2 = 1.0167$

Gesamtfläche: $A_{ges} := A_1 + A_2$ $\qquad A_{ges} = 1.8445$

Teilaufgabe 2.0
Der Verlauf einer Hochspannungsleitung zwischen den Punkten Q und R wird für $x \in [\,-110\,;\,110\,]$ näherungsweise durch die Gleichung $y = 333 \cdot \left(e^{\frac{x-50}{666}} + e^{-\frac{x-50}{666}} \right) - 658$ beschrieben (siehe Skizze).
Der Hang wird in der Skizze durch die Gerade OE mit der Gleichung $y = -0.1 \cdot x$ begrenzt.

Auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
Alle Ergebnisse sind auf eine Nachkommastelle zu runden, sofern nicht anders angegeben.



Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Berechnen Sie die Masthöhen $\overline{EQ}$ und $\overline{FR}$.

$$f(x) := 333 \cdot \left(e^{\frac{x-50}{666}} + e^{-\frac{x-50}{666}} \right) - 658 \qquad g(x) := -0.1 \cdot x$$

$$EQ := f(-110) - g(-110) \qquad EQ = 16.3$$

$$FR := f(110) \qquad FR = 10.7$$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Berechnen Sie die Größe des Winkels φ, den die Hochspannungsleitung mit dem Mast im Punkt Q einschließt.

[Mögliches Teilergebnis: $y'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x-50}{666}} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x-50}{666}}$]

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = \frac{e^{\frac{x}{666} - \frac{25}{333}}}{2} - \frac{e^{\frac{25}{333} - \frac{x}{666}}}{2}$$

$$m := f'(-110) = -0.243 \qquad \alpha := \operatorname{atan}(m) = -13.634 \cdot ° \qquad \Rightarrow \qquad \varphi := 90° - |\alpha| = 76.366 \cdot °$$

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)
Der Punkt S ist derjenige Punkt der Leitung, der die geringste Entfernung vom Hang hat. Die Leitung hat dort die gleiche Steigung wie der Hang (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie den **exakten** Wert der x-Koordinate von S.

[Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $u = e^{\frac{x-550}{666}}$]

Wähle einen Punkt P $\in$ G_f: P(u/f(u))

Die Tangente in P hat die Steigung $m_{Hang} := \frac{-1}{10}$ $\qquad f'(x) := \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x-50}{666}} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x-50}{666}}$

$$f'(x) = \frac{-1}{10} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x-50}{666}} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x-50}{666}} = \frac{-1}{10}$$

Substitution: $\qquad u = e^{\frac{x-50}{666}}$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(u-\frac{1}{u}\right)=\frac{-1}{10}\ \text{auflösen}, u \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{101}}{10}-\frac{1}{10} \\ -\frac{\sqrt{101}}{10}-\frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.905 \\ -1.105 \end{pmatrix}$$

Lösung

keine Lösung

Resubstitution: $e^{\frac{x-50}{666}}=\frac{\sqrt{101}}{10}-\frac{1}{10}$

$$x_S := e^{\frac{x-50}{666}}=\frac{\sqrt{101}}{10}-\frac{1}{10}\ \text{auflösen}, x \rightarrow 666\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{101}}{10}-\frac{1}{10}\right)+50$$

Exakter Wert: $x_S = 666\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{101}}{10}-\frac{1}{10}\right)+50$

Teilaufgabe 2.4 (5 BE)
S hat die Koordinate $x_S \approx -16.5$ (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die geringste Entfernung des Punktes S vom Hang.

Tangente in S: $x_S := -16.5$ $\quad y_S := f(x_S) = 11.3$

Gleichung der Tangente: $t2(x) := \frac{-1}{10}\cdot(x-x_S)+f(x_S)$

Die Abstandsgerade steht senkrecht auf der Tangente in S:

Gleichung der Normalen: $n(x) := 10\cdot(x-x_S)+f(x_S)$

Gleichung des Hangs: $h(x) := -0.1\cdot x$

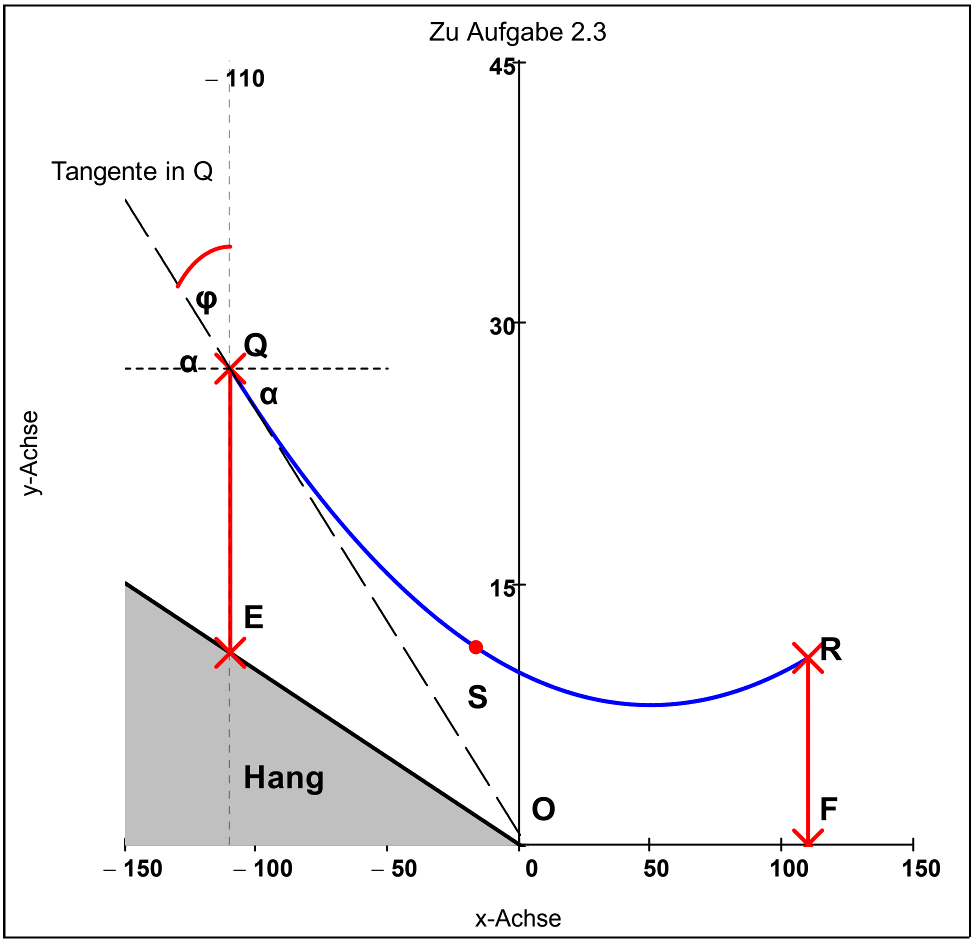
n ∩ g:

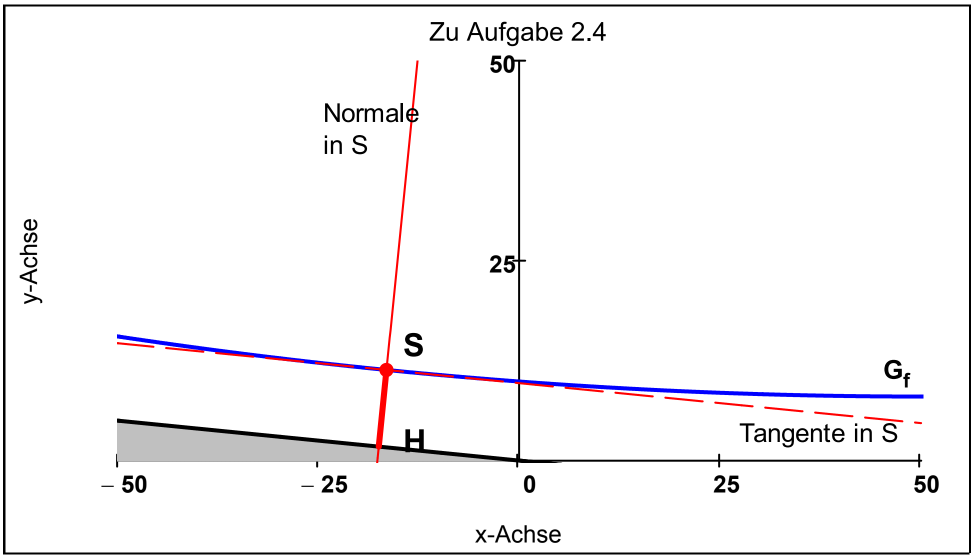
$$x_H := n(x)=h(x) \rightarrow 10\cdot x+176.32276679520192568=-0.1\cdot x \left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, x \\ \text{Gleitkommazahl}, 4\end{array}\right. \rightarrow -17.46$$

$x_H = -17.46$ $\quad y_H := h(x_H) = 1.746$

Geringste Entfernung:

$$d := \sqrt{(x_S-x_H)^2+(y_S-y_H)^2} \qquad d = 9.625$$


Zu Aufgabe 2.3
– 110
45
Tangente in Q
φ
30
Q
α
α
15
E
R
S
Hang
O
F
– 150
– 100
– 50
0
50
100
150
y-Achse
x-Achse


Zu Aufgabe 2.4
50
Normale
in S
25
S
H
Tangente in S
– 50
– 25
0
25
50
y-Achse
x-Achse