Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 12 Technik - B II - Lösung mit CAS**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 mit dem Ursprung O sind die Punkte A(1/3/-2), B_k(k/0/1) mit k $\in$ IR und C(-1/6/0) sowie die Ebene E: $5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 4$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Die Ebene E schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten X, Y und Z.
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide OXYZ.

$$E(x_1, x_2, x_3) := 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 4$$

Schnittpunkt mit der x_1-Achse:

$$x_1 := E(x_1, 0, 0) = 0 \rightarrow 5 \cdot x_1 - 4 = 0 \text{ auflösen}, x_1 \rightarrow \frac{4}{5} \qquad OX := \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt mit der x_2-Achse:

$$x_2 := E(0, x_2, 0) = 0 \rightarrow 2 \cdot x_2 - 4 = 0 \text{ auflösen}, x_2 \rightarrow 2 \qquad OY := \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt mit der x_3-Achse:

$$x_3 := E(0, 0, x_3) = 0 \rightarrow 2 \cdot x_3 - 4 = 0 \text{ auflösen}, x_3 \rightarrow 2 \qquad OZ := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$V := \frac{1}{6} \cdot [(OX \times OY) \cdot OZ] \qquad V = \frac{8}{15} = 0.533$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, der durch Spiegelung des Punktes C an der Ebene E hervorgeht.

Normalenvektor: $n_E := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Ortsvektor zu C: $OC := \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hilfsgerade h $\perp$ E durch C:

$$x_h(\tau) := OC + \tau \cdot n_E = \begin{pmatrix} 5\cdot\tau - 1 \\ 2\cdot\tau + 6 \\ 2\cdot\tau \end{pmatrix}$$

Hilfsgerade h $\cap$ E:

$$\tau_0 := E\left(x_h(\tau)_1, x_h(\tau)_2, x_h(\tau)_3\right) = 0 \rightarrow 33\cdot\tau + 3 = 0 \text{ auflösen}, \tau \;\rightarrow -\frac{1}{11}$$

Ortsvektor zum Lotfußpunkt L:

$$OL := x_h\left(\tau_0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{16}{11} \\ \frac{64}{11} \\ -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Spiegelpunkt P:

$$OP := OC + 2\cdot(OL - OC) = \begin{pmatrix} -\frac{21}{11} \\ \frac{62}{11} \\ -\frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

$$P := OP^T \qquad P \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{21}{11} & \frac{62}{11} & -\frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)

Bestimmen Sie den Wert für k so, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB_k}$ und $\overrightarrow{AC}$ orthogonal zueinander sind.

Ortsvektoren:

$$OA := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad OB(k) := \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad OC = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren:

$$AB(k) := OB(k) - OA = \begin{pmatrix} k-1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad AC := OC - OA = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$AB(k)\cdot AC = 0 \rightarrow -2\cdot k - 1 = 0 \text{ auflösen}, k \;\rightarrow -\frac{1}{2}$$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)
Berechnen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Flächeninhalt F(k) des Dreiecks AB_kC minimal wird.
Hinweis: Es genügt, den Term unter der Wurzel zu betrachten.
[Mögliches Teilergebnis: $F(k) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{13\cdot k^2 - 38\cdot k + 322}$]

$$F_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\left|(AB(k) \times AC)\right|$$

$$AB(k) \times AC = \begin{pmatrix} -15 \\ -2\cdot k - 4 \\ 3\cdot k - 9 \end{pmatrix}$$

$$F(k) := \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-2\cdot k - 4)^2 + (3\cdot k - 9)^2 + 15^2}$$

$$F(k) = \frac{\sqrt{13\cdot k^2 - 38\cdot k + 322}}{2}$$

Hilfsfunktion: $f(k) := 13\cdot k^2 - 38\cdot k + 322$

Ableitungsfunktion: $f'(k) := \frac{d}{dk}f(k) = 26\cdot k - 38$

Extremstelle: $k_0 := f'(k) = 0 \text{ auflösen}, k \rightarrow \frac{19}{13}$

$f''(k) := \frac{d}{dk}f'(k) = 26$

$f''(k_0) = 26$ > 0, also Tiefpunkt

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)
Untersuchen Sie, ob der Punkt B_k auf der Geraden AC liegen kann.

Gerade AC:

$$x_{AC}(\sigma) := OA + \sigma\cdot(OC - OA) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2\cdot\sigma \\ 3\cdot\sigma + 3 \\ 2\cdot\sigma - 2 \end{pmatrix}$$

$$OB(k) = x_{AC}(\sigma) \rightarrow \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\cdot\sigma \\ 3\cdot\sigma + 3 \\ 2\cdot\sigma - 2 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, k, \sigma \rightarrow \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\cdot\sigma \\ 3\cdot\sigma + 3 \\ 2\cdot\sigma - 2 \end{pmatrix}$$

Es gibt keine Lösung, also $B_k \notin$ Gerade AC.

Teilaufgabe 1.6.0
Die Ebene H_k enthält das Dreieck AB_kC und wird beschrieben durch die Gleichung
H_k: $-15 \cdot x_1 - (2 \cdot k + 4) \cdot x_2 + (3 \cdot k - 9) \cdot x_3 = -12 \cdot k - 9$ (Nachweis nicht erforderlich).

Teilaufgabe 1.6.1 (5 BE)
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E und H_k in Abhängigkeit des Parameters k.

Normalenvektoren linear abhängig?

$$n_E = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad n_H(k) := \begin{pmatrix} -15 \\ -2 \cdot k - 4 \\ 3 \cdot k - 9 \end{pmatrix}$$

$$n_H(k) = \lambda \cdot n_E \rightarrow \begin{pmatrix} -15 \\ -2 \cdot k - 4 \\ 3 \cdot k - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \lambda \\ 2 \cdot \lambda \\ 2 \cdot \lambda \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \lambda, k \rightarrow (-3 \quad 1)$$

$$n_H(1) = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad E \parallel H_1$$

$A \in H_1$. $A \in E$?

$E(OA_1, OA_2, OA_3) \rightarrow 3$ ungleich Null, also $A \notin E$, E echt parallel H_1 für $\mathbf{k = 1}$

$k \neq 1$ E und H_k schneiden sich in einer Geraden.

Teilaufgabe 1.6.2 (4 BE)
Bestimmen Sie den Wert für k so, dass H_k den Ursprung enthält. Untersuchen Sie anschließend, ob in diesem Fall der Urprung 0 im Inneren des Dreiecks AB_kC liegt.

$$H_k(x_1, x_2, x_3, k) := -15 \cdot x_1 - (2 \cdot k + 4) \cdot x_2 + (3 \cdot k - 9) \cdot x_3 + 12 \cdot k + 9$$

$0 \in H_k$: $\quad k_0 := H_k(0,0,0,k) = 0 \rightarrow 12 \cdot k + 9 = 0 \text{ auflösen}, k \rightarrow -\frac{3}{4}$

Gibt es die Linearkombination: $\quad \overrightarrow{AO} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{AC} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AB(k_0)}$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AO}$: $\quad AO := -OA = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 \cdot (OC - OA) + \lambda_2 \cdot \left(OB\left(k_0\right) - OA\right) = AO \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot \lambda_1 - \dfrac{7 \cdot \lambda_2}{4} \\ 3 \cdot \lambda_1 - 3 \cdot \lambda_2 \\ 2 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot (OC - OA) + \lambda_2 \cdot \left(OB\left(k_0\right) - OA\right) = AO \text{ auflösen}, \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{5} & \dfrac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Da $\lambda_1 < 0$, kann O nicht im Inneren des Dreiecks $AB_{-0.75}C$ liegen.

Teilaufgabe 1.6.3 (4 BE)
Bestimmen Sie die Länge der kleinsten Seite des Dreiecks AB_kC.

$$AB(k) := OB(k) - OA = \begin{pmatrix} k - 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |AB(k)| = \sqrt{(|k-1|)^2 + 18} \qquad > \sqrt{18}$$

$$AC := OC - OA = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |AC| = \sqrt{17}$$

Länge der kleinsten Dreiecksseite

$$CB(k) := OB(k) - OC = \begin{pmatrix} k + 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |CB(k)| = \sqrt{(|k+1|)^2 + 37} \qquad > \sqrt{37}$$