Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2014

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

Aufgabe
An einer Beruflichen Oberschule besuchen acht Schülerinnen und zehn Schüler die 13. Jahrgangsstufe in der Ausbildungsrichtung Technik. Der Mathematiklehrer hat zur ersten Unterrichtsstunde in Stochastik einen ungewöhnlichen *Würfel* mitgebracht. Dieser hat die Form eines regelmäßigen Tetraeders und trägt auf den Seitenflächen die Zahlen 1, 2, 3 und 4. Nach jedem Wurf des Tetraeders gilt die Zahl (Augenzahl) als geworfen, die auf der unten liegenden Fläche steht.

Teilaufgabe 1
Für die folgenden Teilaufgaben soll angenommen werden, dass alle Augenzahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten (Laplace-Tetraeder).

Teilaufgabe 1.1 **(5 BE)**
Der Mathematiklehrer wirft das Tetraeder dreimal.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: *Es wird mindestens einmal die Augenzahl 2 geworfen*,
B: *Alle geworfenen Augenzahlen sind verschieden*,
C: *Es werden genau zwei gleiche Augenzahlen geworfen*.

Bernoulli oder Tafelwerk:

$$P(A) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^3 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{27}{64} = \frac{37}{64} = 0.57813$$

Zählprinzip:

$$P(B) = \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{24}{4^3} = \frac{3}{8} = 0.37500$$

alle verschieden ↓ alle gleich ↓

$$P(C) = 1 - \underbrace{P(B)}_{\text{alle verschieden}} - \underbrace{\frac{4}{4^3}}_{\text{alle gleich}} = 1 - 0.375 - \frac{1}{16} = 0.56250$$

oder:

$$P(C) = 4 \cdot P(X = 2) = 4 \cdot \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} = 0.56250$$

oder:

gleiche Augenzahl beim 1. u. 2.Wurf ↓ $4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

andere Augenzahl beim dritten Wurf ↓ $3 \cdot \frac{3}{4}$

$$P(C) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{4^3} = \frac{9}{16} = 0.56250$$

Darstellung des Baumdiagramms vgl. Anhang Seite 7

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)
Nun wird das Tetraeder von den Schülerinnen und Schülern der Klasse 13T 1500-mal geworfen. Berechnen Sie, welche Anzahlen von Einsen dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 1 % auftreten.

Zufallsgröße X: Anzahl der Eisen $\quad n := 1500 \quad p := \frac{1}{4} \quad$ k unbekannt

Bernoulli: $\quad P(X = k) = \binom{1500}{k} = 0.25^{k} \cdot 0.75^{1500-k}$

Bedingung: $\quad P(X = k) \geq 0.01$

Näherung mithilfe der Dichtefunktion φ(x) der Normalverteilung.

$\mu := n \cdot p = 375 \qquad \sigma^2 = 375 \cdot 0.75 = 281.25 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 16.771$

$\frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \geq 0.01 \qquad \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \geq 0.01 \cdot \sigma \qquad \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \geq 0.16771 \qquad$ TW: $\quad 0.16915$

Symmetrische Funktion: $\quad -1.31 \leq \frac{k-\mu}{\sigma} \leq 1.31$

linke Seite: $\quad -1.31 \leq \frac{k-\mu}{\sigma}$ **auflösen, k** $\rightarrow 353.03063212106456718 \leq k < \infty$

rechte Seite: $\quad \frac{k-\mu}{\sigma} \leq 1.31$ **auflösen, k** $\rightarrow -\infty < k \leq 396.96936787893543282$

$353.03 \leq k \leq 396.97 \qquad$ runden: $\qquad 354 \leq k \leq 396$

Bei 1500 Würfen erscheinen für die Einsen alle Häufigkeiten von 354 bis 396 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 1%.

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)
Ermitteln Sie, wie oft man das Tetraeder mindestens werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90 % mindestens 1000-mal die Augenzahl 4 zu erhalten.

n unbekannt. $\qquad \mu := \frac{1}{4} \cdot n \qquad \sigma := \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \cdot \sqrt{n}$

$P(X \geq 1000) > 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 999) > 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 999) < 0.1$

$\Phi\left(\frac{999 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) < 0.1 \qquad$ TW $\qquad \frac{999 - \mu + 0.5}{\sigma} < -1.281$

$999 - \frac{1}{4} \cdot n + 0.5 < -1.281 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \cdot \sqrt{n} \qquad$ Nebenrechnung: $\quad -1.281 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = -0.555$

Substitution: $z = \sqrt{n}$ $\qquad \frac{1}{4}\cdot z^2 - 0.555\cdot z - 999.5 > 0$

$$z_1 := \frac{0.555 - \sqrt{0.555^2 - 4\cdot\frac{1}{4}\cdot(-999.5)}}{2\cdot\frac{1}{4}} = -62.129$$

keine Lösung

$$z_2 := \frac{0.555 + \sqrt{0.555^2 - 4\cdot\frac{1}{4}\cdot(-999.5)}}{2\cdot\frac{1}{4}} = 64.349$$

Resubstitution: $n := (z_2)^2 = 4140.86$ aufrunden: $n := \mathrm{ceil}\left[(z_2)^2\right] = 4141$

Es müssen 4141 Würfe durchgeführt werden.

Teilaufgabe 2 (7 BE)
Die Schülerin Verena bringt zu einer Unterrichtstunde in Stochastik ein äußerlich gleichartiges Tetraeder mit. Einige Mitschüler vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit die Augenzahl 1 zu werfen nicht 25 % beträt. Um dies zu überprüfen, wird das Tetraeder 500-mal geworfen.
Entwickeln Sie einen geeigneten (zweiseitigen) Sigifikanztest zur Überprüfung der Laplace-Eigenschaft des Tetraeders (Nullhypothese $p = 0.25$) und ermitteln Sie den Ablehnungsbereich und den Annahmebereich der Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5 %.

Testgröße X: Anzahl der Treffer bei $n := 500$ Würfen $\qquad p := 0.25$

Nullhypothese H_0: $p = 0.25$ $\qquad$ Nullhypothese H_1: $p \neq 0.25$

Testart: Zweiseitiger Signifikanztest

Annahmebereich: $A = \{\, k_1 + 1, k_1 + 2, \ldots, k_2 \,\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\, 0, 1, \ldots, k_1 \,\} \cup \{\, k_2 + 1, k_2 + 2, \ldots, 500 \,\}$

$P(\overline{A}) \le 0.05$ $\qquad \mu := n\cdot p = 125$ $\qquad \sigma := \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} = 9.682$ $\qquad$ >3, Näherung durch NV möglich

$P(X \le k_1) \le 0.025$ $\qquad \Phi\left(\frac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \le 0.025$

TW $\qquad \frac{k_1 - 125 + 0.5}{9.682} \le -1.960$ auflösen, $k_1 \rightarrow -\infty < k_1 \le 105.52328$

abrunden: $k_1 := 105$

1. Möglichkeit zur Berechnung von k_2:

Abweichung vom Erwartungswert: $c := \mu - (k_1 + 1) = 19$

Obere Grenze: $k_2 := \mu + c = 144$

$A = \{\ 106, 107, \ldots, 144\ \}$ $\quad \overline{A} = \{\ 0, 1, \ldots, 105\ \} \cup \{\ 145, 146, \ldots, 500\ \}$

2. Möglichkeit zur Berechnung von k_2: $k_2 := k_2$

$$P(X > k_2) \le 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le k_2) \le 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le k_2) \ge 0.975$$

$$\Phi\left(\frac{k_2 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.975$$

$$\frac{k_2 - \mu + 0.5}{\sigma} \ge 1.960 \text{ auflösen}, k_2 \;\rightarrow 143.47761839641634252 \le k_2 < \infty \qquad k_2 = 144$$

2. Lösung zweis. Hypothesentest:

$\mu := n \cdot p = 125$ $\qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 9.682$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(\mu - c \le x \le \mu + c) \le 0.05$$

$$P(\mu - c \le x \le \mu + c) \ge 0.95$$

Umgebungsformel:

$$2 \cdot \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) - 1 \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.975$$

$$\frac{c + 0.5}{\sigma} \ge 1.960 \quad \Leftrightarrow \quad c \ge 1.96 \cdot 9.682 - 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad c \ge 18.48$$

aufrunden: $c := 19$

Obere Grenze: $g_o := \mu + c = 144$

Untere Grenze: $g_u := \mu - c = 106$

$A = \{\ 106, 107, \ldots, 144\ \}$ $\quad \overline{A} = \{\ 0, 1, \ldots, 105\ \} \cup \{\ 145, 146, \ldots, 500\ \}$

Teilaufgabe 3
Der Schüler Anton und seine Freundin Beate haben zur Silvesterparty drei Schulfreunde mit deren Freundinnen eingeladen.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)
Die Gäste treffen sich pünktlich vor dem Haus des Gastgebers und gehen zufällig verteilt nacheinander durch die Tür. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
E_1: *Am Anfang und am Ende tritt ein Mädchen ein.*

Es kommen 6 Personen: 3 Mädchen und 3 Jungen

Zählprinzip: $P(E_1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$

oder: $P(E_1) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = 0.2$

oder: $m, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, m$ $\qquad P(E_1) = \frac{1 \cdot \binom{4}{1} \cdot 1}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0.2$

Nebenrechungen: $\text{combin}(4, 1) = 4$

$\text{combin}(6, 3) = 20$

oder: $P(E_1) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{6}{1}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{3}}{\binom{5}{4}} = \frac{3 \cdot 1}{6} \cdot \frac{2 \cdot 1}{5} = 0.6 \cdot 0.4 = 0.2$

Nebenrechungen: $\text{combin}(3, 1) = 3$ $\qquad \text{combin}(2, 1) = 2$

$\text{combin}(3, 0) = 1$ $\qquad \text{combin}(3, 3) = 1$

$\text{combin}(6, 1) = 6$ $\qquad \text{combin}(5, 4) = 5$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Als guter Gastgeber reicht Anton eine Pralinenschachtel mit zehn Schokoladepralinen und fünf Marzipanpralinen. Einer der Gäste greift mit verbundenen Augen zufällig in die Schachtel, *nimmt fünf Pralinen und erwischt alle fünf Marzipanpralinen*.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis E_2.

Urnenmodell ohne Zurücklegen: $\mathbf{N := 15}$ $\quad \mathbf{K := 5}$ $\quad \mathbf{k := 5}$ $\quad \mathbf{n := 5}$

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad P(E_2) = \frac{\binom{5}{5}\cdot\binom{10}{0}}{\binom{15}{5}} = \frac{1\cdot 1}{3003} = 0.00033$$

Nebenrechungen: $\mathrm{combin}(5,5) = 1$ $\quad \mathrm{combin}(10,0) = 1$ $\quad \mathrm{combin}(15,5) = 3003$

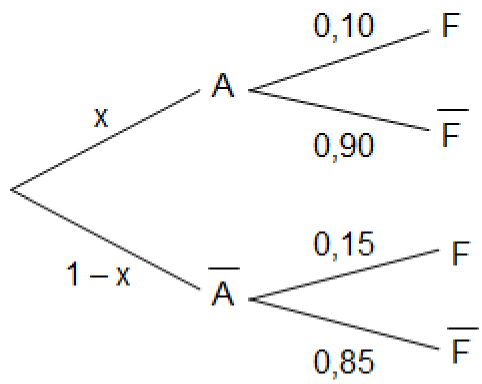
oder Zählprinzip: $$P(E_2) = \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11} = \frac{1}{3003} = 0.00033$$

Teilaufgabe 4 (7 BE)
Das Schuljahr ist zu Ende. Zur Abschlussfeier an der Beruflichen Oberschule erhält der Vorsitzende des Fördervereins *Die Ehemaligen* von einem ungenannten Sponsor als Werbegeschenk für die Absolventen einen Karton mit Billigkugelschreibern, die ausschließlich von den Firmen Atlas (A) und Salta $(\overline{A})$ stammen. 10 % der Kugelschreiber der Firma Atlas und 15 % der Firma Salta sind fehlerhaft (F). 60 % aller fehlerhaften Kugelschreiber stammen von der Firma Atlas. Ein Preisträger der Schule entnimmt dem Karton auf gut Glück einen Kugelschreiber.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kugelschreiber von der Firma Atlas stammt.

Gegeben: $P_A(F) = 0.10$ $\quad P_{\overline{A}}(F) = 0.15$ $\quad P_F(A) = 0.60$

Gesucht: $P(A) = x$

Formel: $$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = 0.60$$



Aus dem Baumdiagramm:

$$\frac{x\cdot 0.10}{x\cdot 0.10 + (1-x)\cdot 0.15} = 0.60$$

$$0.10\cdot x = 0.60\cdot[0.10\cdot x + 0.15\cdot(1-x)]$$

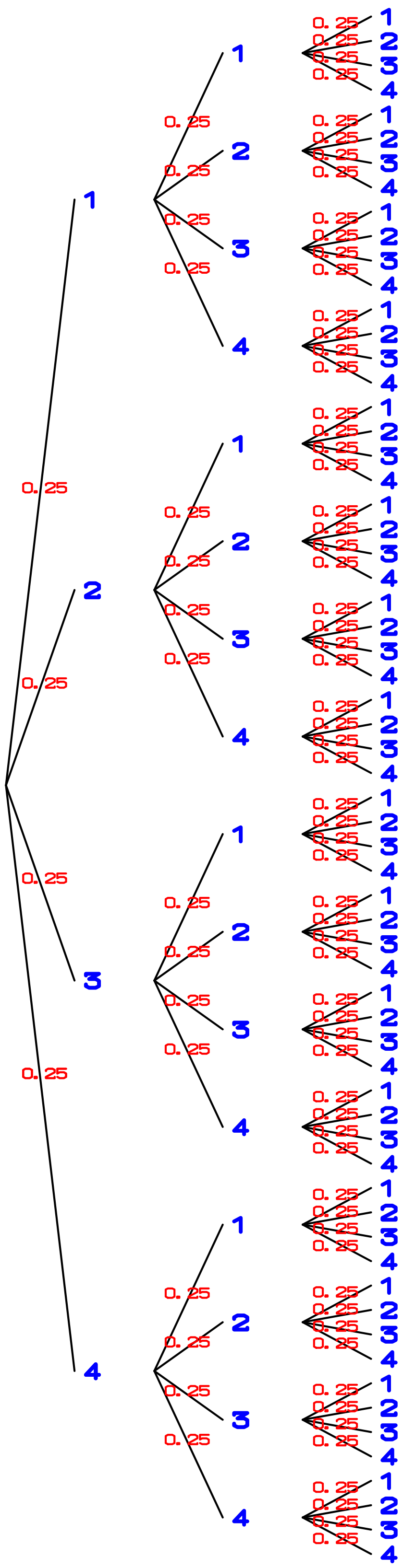
$$0.10\cdot x = 0.60\cdot[0.10\cdot x + 0.15\cdot(1-x)]$$

$$0.10\cdot x - 0.60\cdot 0.10\cdot x + 0.60\cdot 0.15\cdot x = 0.60\cdot 0.15$$

$$0.13\cdot x = 0.09 \qquad x = \frac{0.09}{0.13} = \frac{9}{13}$$

Die Kugelschreiber stammen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{9}{13}$ von der Firma Atlas.

Anhang zu Aufgabe 1.1



$p\{1\ 1\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 1\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 1\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 1\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 2\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 2\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 2\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 2\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 3\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 3\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 3\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 3\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 4\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 4\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 4\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{1\ 4\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 1\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 1\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 1\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 1\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 2\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 2\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 2\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 2\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 3\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 3\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 3\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 3\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 4\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 4\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 4\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{2\ 4\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 1\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 1\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 1\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 1\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 2\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 2\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 2\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 2\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 3\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 3\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 3\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 3\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 4\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 4\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 4\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{3\ 4\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 1\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 1\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 1\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 1\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 2\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 2\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 2\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 2\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 3\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 3\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 3\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 3\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 4\ 1\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 4\ 2\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 4\ 3\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$
$p\{4\ 4\ 4\}=0.25\cdot 0.25\cdot 0.25 = 0.01563$

Gesamtsumme = 1