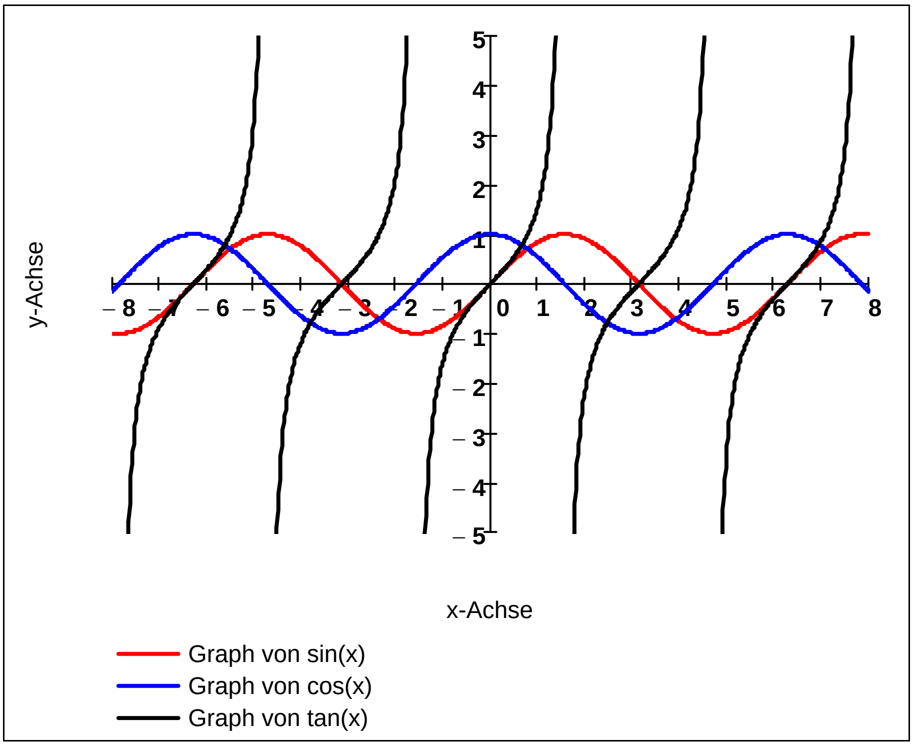
mathphys-online

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN



Inhaltsverzeichnis

Graphiken erstellt mit Mathcad 15

Trigonometrische Funktionen

Bei naturwissenschaftlichen oder technischen Aufgaben kommt es häufig vor, dass Winkel eines Dreiecks bestimmt werden müssen. Durch die Anwendung der ***Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck*** oder von Sinussatz und Kosinussatz im beliebigen Dreieck können diese Winkel berechnet werden.

1 Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Die rechtwinkligen Dreiecke ΔAB_1C_1 und ΔAB_2C_2 sind ähnlich. Dann sind die Verhältnisse sich entsprechender Seiten gleich.
Zum Beispiel gilt für den Winkel $\alpha = \sphericalangle B_1AC_1$ bzw. $\alpha = \sphericalangle B_2AC_2$ mit $\alpha \in \left]0°; 90°\right[$ folgende

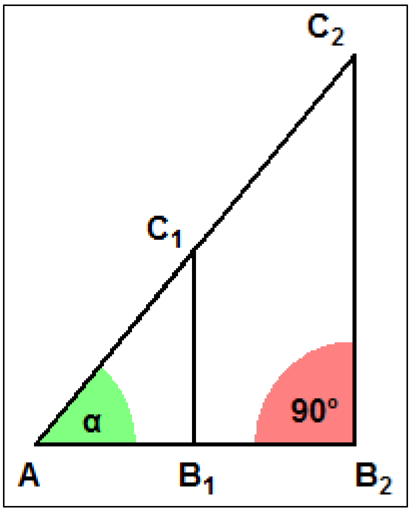
Definition

Sinus $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{B_1C_1}{AC_1} = \dfrac{B_2C_2}{AC_2}$

Kosinus $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{AB_2}{AC_2}$

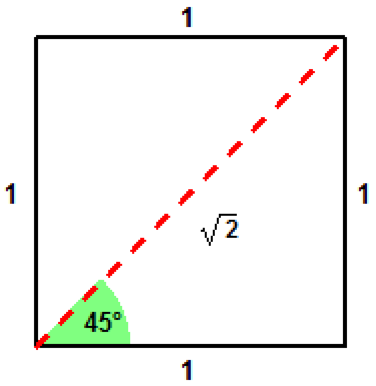
Tangens $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \dfrac{B_1C_1}{AB_1} = \dfrac{B_2C_2}{AB_2}$

Kotangens $\cot(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \dfrac{AB_1}{B_1C_1} = \dfrac{AB_2}{B_2C_2}$



Einige spezielle Werte

Quadrat mit Seitenlänge 1

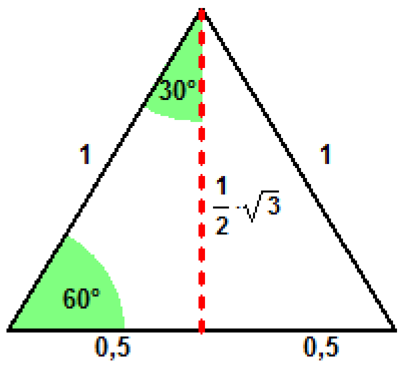


$\sin(45°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos(45°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan(45°) = 1$

Gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1



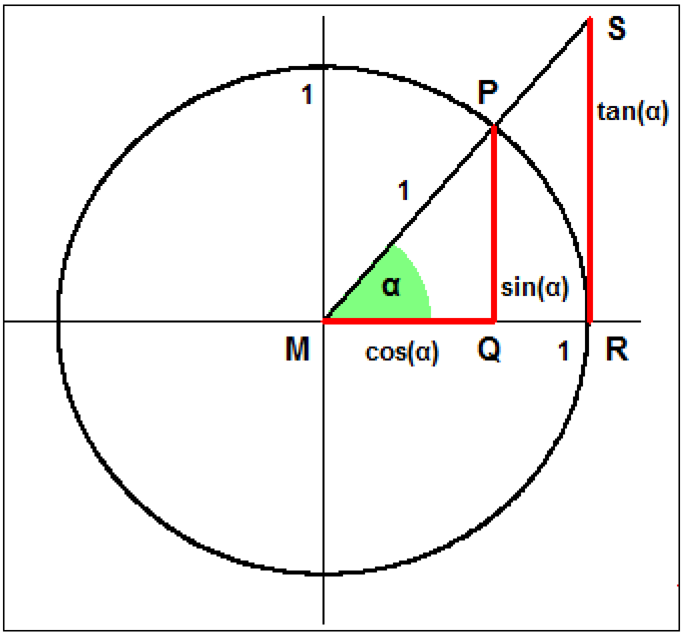
$\sin(30°) = \dfrac{1}{2}$ $\sin(60°) = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos(30°) = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ $\cos(60°) = \dfrac{1}{2}$

$\tan(30°) = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$ $\tan(60°) = \sqrt{3}$

2 Winkelfunktionen am Einheitskreis

2.1 Winkelfunktionen im ersten Quadranten



Gegeben sind die rechtwinkligen Dreiecke ΔMQP und ΔMRS am Einheitskreis. Dann gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{PQ}{MP} = \frac{PQ}{1} = PQ$$

$$\cos(\alpha) = \frac{MQ}{MP} = \frac{MQ}{1} = MQ$$

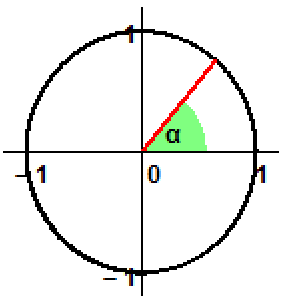
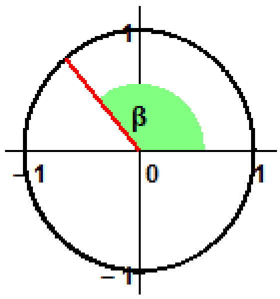
$$\tan(\alpha) = \frac{SR}{MR} = \frac{SR}{1} = SR$$

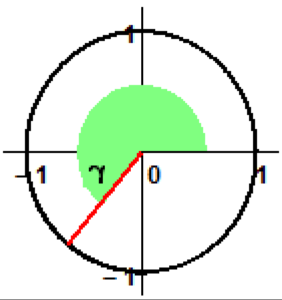
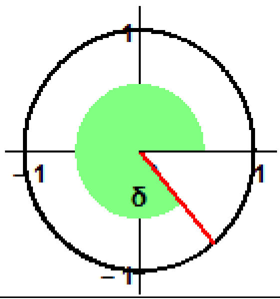
Weiter gilt:

$$(\sin(\alpha))^2 = (\cos(\alpha))^2 = 1$$

Trigonometrischer Pythagoras

2.2 Vorzeichen in den verschiedenen Quadranten

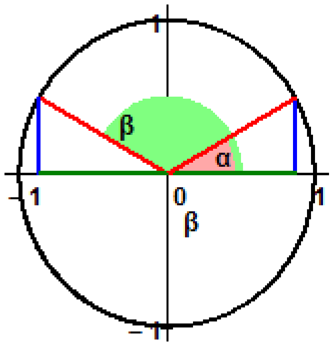
1. Quadrant	2. Quadrant
 $\sin(\alpha)$ positiv $\cos(\alpha)$ positiv $\tan(\alpha)$ positiv	 $\sin(\beta)$ positiv $\cos(\beta)$ negativ $\tan(\beta)$ negativ

3. Quadrant	4. Quadrant
 $\sin(\gamma)$ negativ $\cos(\gamma)$ negativ $\tan(\gamma)$ positiv	 $\sin(\delta)$ negativ $\cos(\delta)$ positiv $\tan(\delta)$ negativ

2.3 Zurückführen stumpfer Winkel auf spitze Winkel bei Winkelfunktionen

<table>
<tr>
<td>

2. Quadrant



</td>
<td>

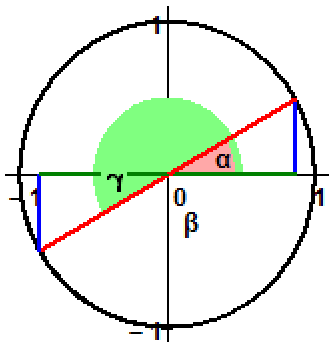
Sinus: $\sin(\beta) = \sin(180° - \alpha) = +\sin(\alpha)$

Kosinus: $\cos(\beta) = \cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$

Tangens: $\tan(\beta) = \tan(180° - \alpha) = -\tan(\alpha)$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3. Quadrant



</td>
<td>

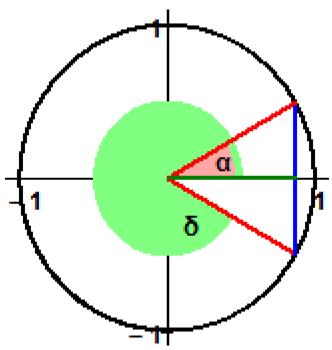
Sinus: $\sin(\gamma) = \sin(180° + \alpha) = -\sin(\alpha)$

Kosinus: $\cos(\gamma) = \cos(180° + \alpha) = -\cos(\alpha)$

Tangens: $\tan(\gamma) = \tan(180° + \alpha) = +\tan(\alpha)$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

4. Quadrant



</td>
<td>

Sinus: $\sin(\delta) = \sin(360° - \alpha) = -\sin(\alpha)$

Kosinus: $\cos(\delta) = \cos(360° - \alpha) = \cos(\alpha)$

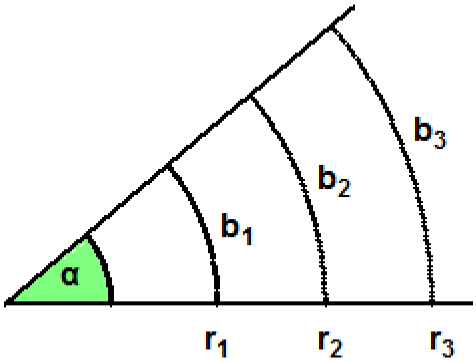
Tangens: $\tan(\delta) = \tan(360° - \alpha) = -\tan(\alpha)$

</td>
</tr>
</table>

3 Das Bogenmaß

3.1 Die natürliche Winkeleinheit

In der Mathematik, aber auch in vielen physikalischen und technischen Anwendungen, ist ein weiteres Winkelmaß, das so genannte ***Bogenmaß*** gebräuchlich.



Kreisumfang: $u = 2 \cdot r \cdot \pi$

Verhältnis: $\frac{b}{u} = \frac{\alpha}{360°}$

Kreisbogen:

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot u = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \frac{\alpha}{180°} \cdot r \cdot \pi$$

$$\frac{b_1}{r_1} = \frac{b_2}{r_2} = \frac{b_3}{r_3} = \ldots = \frac{\alpha}{180°} \cdot r \cdot \pi$$

Man sieht: Der Quotient $\frac{b}{r}$ ist eine Größe, die nur vom Mittelpunktswinkel α abhängig ist.

Definition:

Das ***Bogenmaß*** $\boldsymbol{arc(\alpha) = \frac{b}{r}}$ ***eines Winkels*** $\boldsymbol{\alpha}$ ist gleich der Längenmaßzahl des zugehörigen Bogens im Einheitskreis.

Es gilt:

$$\boxed{a = \mathrm{arc}(\alpha) = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha}$$

Bemerkung:

Die Schreibweise arc(α) wird nur selten verwendet. Stattdessen bezeichnet man in Winkelgraden gemessene Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben, z. B. α, im Bogenmaß gemessene Winkel mir kleinen lateinischen Buchstaben, z. B. a.

Einheit des Bogenmaßes:

Der **Radiant** (Einheitenzeichen ***rad***) dient zur Angabe der Größe eines ebenen Winkels. Er ist eine abgeleitete Einheit im SI-Einheitensystem.

Der ebene Winkel von 1 Radiant umschließt auf der Umfangslinie eines Kreises mit 1 Meter Radius einen Bogen der Länge 1 Meter.

Beim Taschenrechner können Winkelmaße in verschiedenen Einheiten ausgegeben werden.

Für das Gradmaß ist ***Deg*** einzustellen, für das Bogenmaß ***Rad***.

Es gibt noch eine weitere Winkelteilung, die ***Gonteilung*** (Taschenrechner ***Gra***). Bei diesem Winkelmaß hat ein rechter Winkel 100 gon. Diese Winkeleinteilung wird vor allem in der Vermessungstechnik verwendet.

3.2 Das Bogenmaß besonderer Winkel

	1. Quadrant				**2. Quadrant**			
Gradmaß	30	45	60	90	120	135	150	180
Bogenmaß	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

	3. Quadrant				**4. Quadrant**			
Gradmaß	210	225	240	270	300	315	330	360
Bogenmaß	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

<u>Beispiele</u>

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 1R = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot 1R = 57{,}2957795...°$$

Im Gradmaß rechnen: Taschenrechner auf ***Deg***

$\sin(30°) = 0{,}5$; $\qquad \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025...$;

$\sin(50°) = 0{,}766044...$; $\qquad \cos(50°) = 0{,}642787...$

$\sin(\alpha) = 0{,}76 \Rightarrow \alpha = 49{,}46°$; $\qquad \cos(\alpha) = 0{,}76 \Rightarrow \alpha = 40{,}54°$

Im Bogenmaß rechnen: Taschenrechner auf ***Rad***

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$; $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025...$;

$\sin(0{,}873) = 0{,}766044...$; $\qquad \cos(0{,}873) = 0{,}642787...$

$\sin(a) = 0{,}76 \Rightarrow a = 0{,}863$; $\qquad \cos(a) = 0{,}76 \Rightarrow a = 0{,}707$

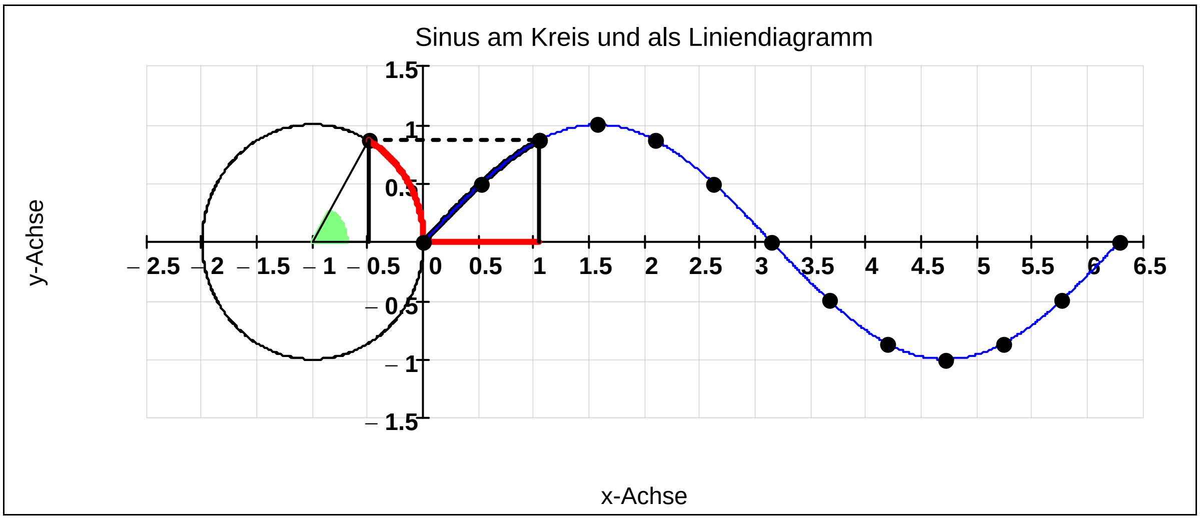
4 Die Sinusfunktion

4.1 Kreisdiagramm und Liniendiagramm

Gegeben ist der Einheitskreis, dessen Bogen am Punkt (0/0) *aufgeschnitten* und auf die x-Achse abgewickelt wird. Der jeweilige Sinuswert wird über dem Winkel x im Bogenmaß aufgetragen.

Funktionsterm: $f(x) = \sin(x)$

Definitionsmenge: $D = [0;\, 2\pi]$

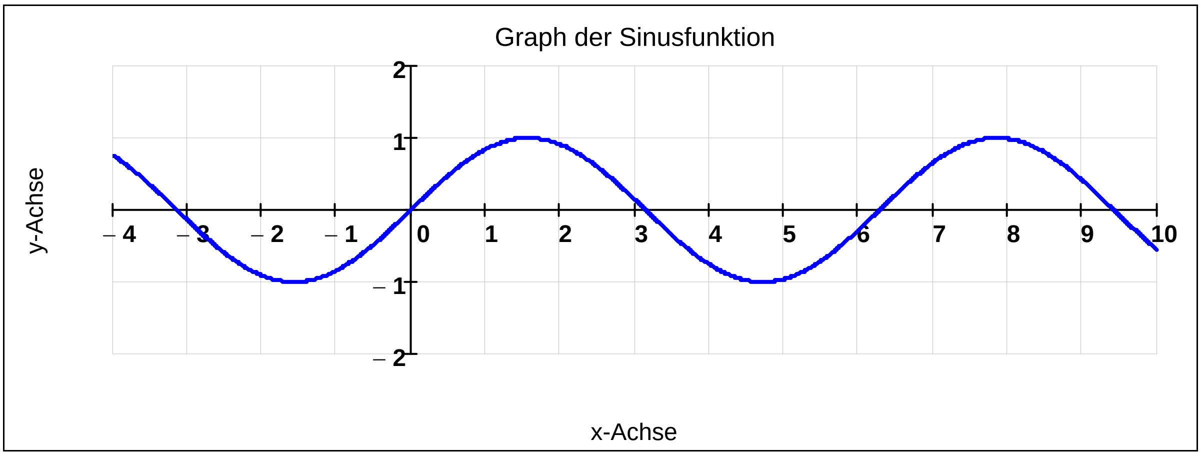


Nach jedem Kreisumlauf wiederholen sich die Funktionswerte: $f(x + 2\pi) = f(x)$

4.2 Eigenschaften der Sinusfunktion

Funktionsterm: $f(x) = \sin(x)$

Definitionsmenge: $D = \mathrm{IR}$ Wertemenge: $W = [-1;\, 1]$



Symmetrie: $f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$, also Punktsymmetrie zum Ursprung.

Periodenlänge: $p = 2\pi$

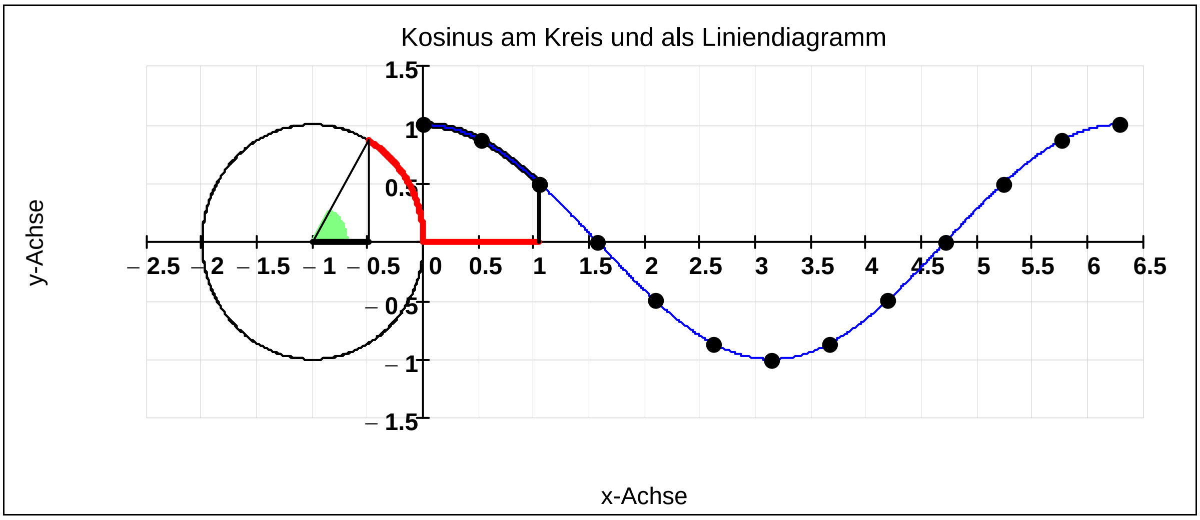
Nullstellen: $\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = k \cdot \pi \;\wedge\; k \in \mathbb{Z}$ (Ganzzahlige Vielfache von Pi)

5 Die Kosinusfunktion

5.1 Kreisdiagramm und Liniendiagramm

Gegeben ist der Einheitskreis, dessen Bogen am Punkt (0/0) *aufgeschnitten* und auf die x-Achse abgewickelt wird. Der jeweilige Kosinuswert wird über dem Winkel x im Bogenmaß aufgetragen.

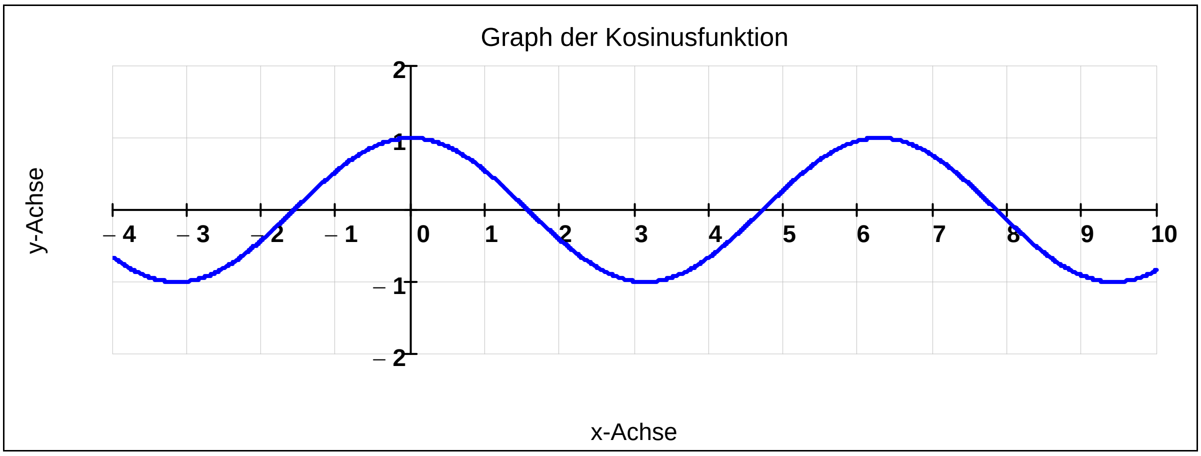
Funktionsterm: $f(x) = \cos(x)$
Definitionsmenge: $D = IR$



Nach jedem Kreisumlauf wiederholen sich die Funktionswerte: $f(x + 2\pi) = f(x)$

5.2 Eigenschaften der Kosinusfunktion

Funktionsterm: $f(x) = \cos(x)$
Definitionsmenge: $D = IR$ Wertemenge: $W = [-1; 1]$



Symmetrie: $f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$, also Achsensymmetrie zur y-Achse.

Nullstellen: $\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \;\wedge\; k \in \mathbb{Z}$ (Ungerade ganzz. Vielfache von $\frac{\pi}{2}$)

Periodenlänge: $p = 2\pi$

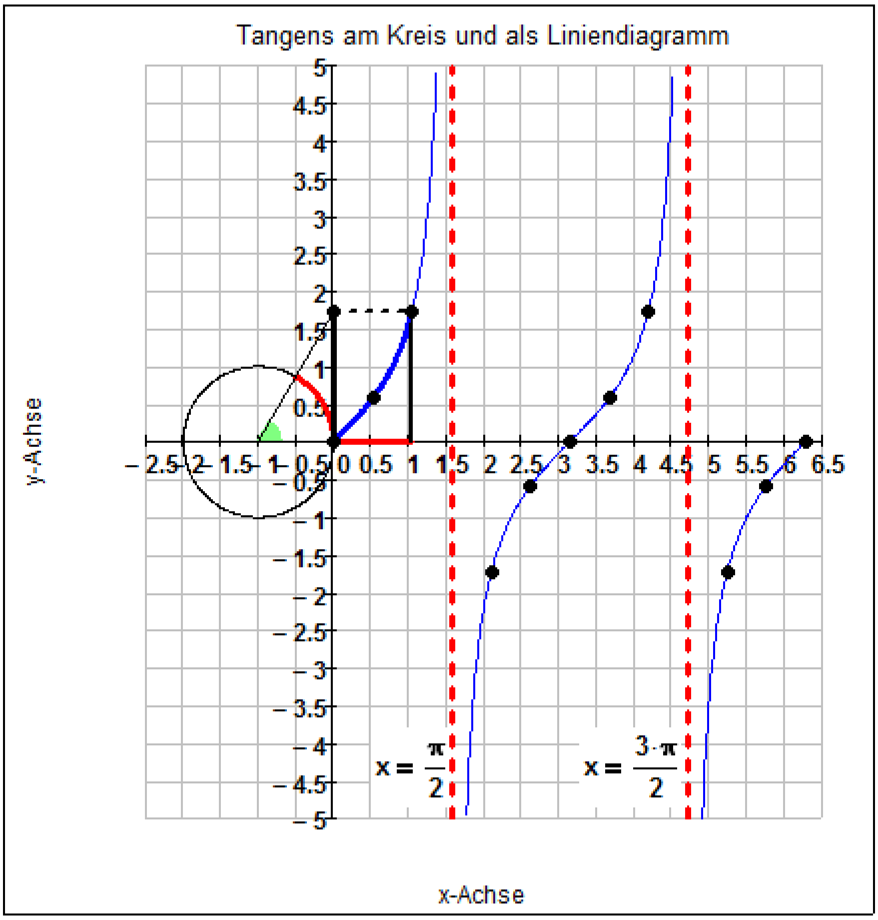
6 Die Tangensfunktion

6.1 Kreisdiagramm und Liniendiagramm

Gegeben ist der Einheitskreis, dessen Bogen am Punkt (0/0) *aufgeschnitten* und auf die x-Achse abgewickelt wird. Der jeweilige Tangenswert wird über dem Winkel x im Bogenmaß aufgetragen.

Funktionsterm: $f(x) = \tan(x)$

Definitionsmenge: $D = [0;\, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{1}{2}\pi;\, \frac{3}{2}\pi \right\}$



Nach jedem halben Kreisumlauf wiederholen sich die Funktionswerte: $f(x+\pi) = f(x)$

6.2 Eigenschaften der Tangensfunktion

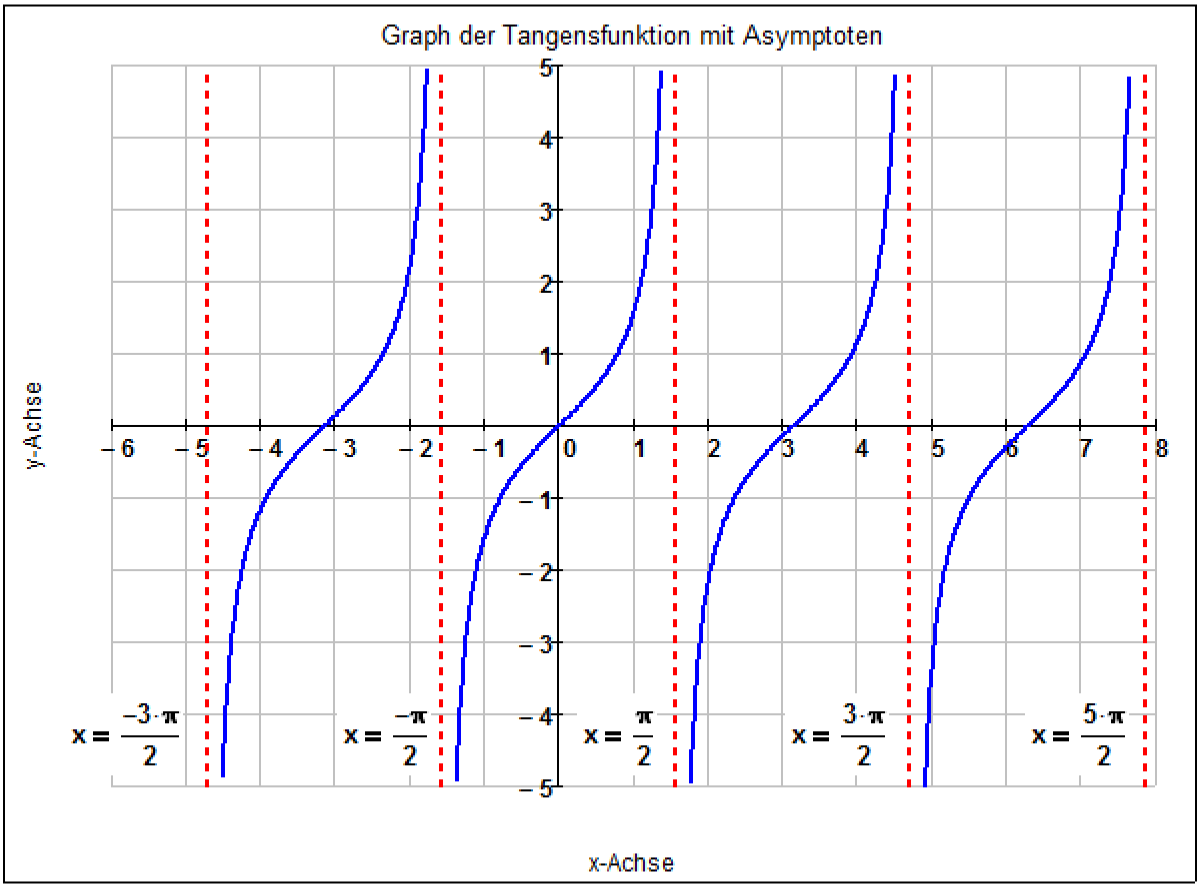
Funktionsterm: $f(x) = \tan(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Definitionslücken: $\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = (2k+1) \cdot \dfrac{\pi}{2} \ \wedge \ k \in \mathbb{Z}$

Definitionsmenge: $D = \mathrm{IR} \setminus \left\{ k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, (2k+1) \cdot \dfrac{\pi}{2} \right\}$

Wertemenge: $W = \left] -\infty ; +\infty \right[$

Nullstellen: $\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = k \cdot \pi \ \wedge \ k \in \mathbb{Z}$



Symmetrie: $f(-x) = \tan(-x) = -\tan(x) = -f(x)$, Punktsymmetrie zum Ursprung.

Periodenlänge: $p = \pi$

7 Die allgemeine Sinusfunktion

Gegeben ist die Funktion f mit

$$\mathbf{f(x) = a \cdot \sin(b\,x + c) + d \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = a \cdot \sin\left(b \cdot \left(x + \frac{c}{b}\right)\right) + d},$$

wobei $\mathbf{x \in IR,\ a, b \in IR \setminus \{0\},\ c, d \in IR}$.

7.1 Einfluss der Parameter

Beispiel 1

$f_a(x) = a \cdot \sin(x)$

$f_1(x) = \sin(x)$

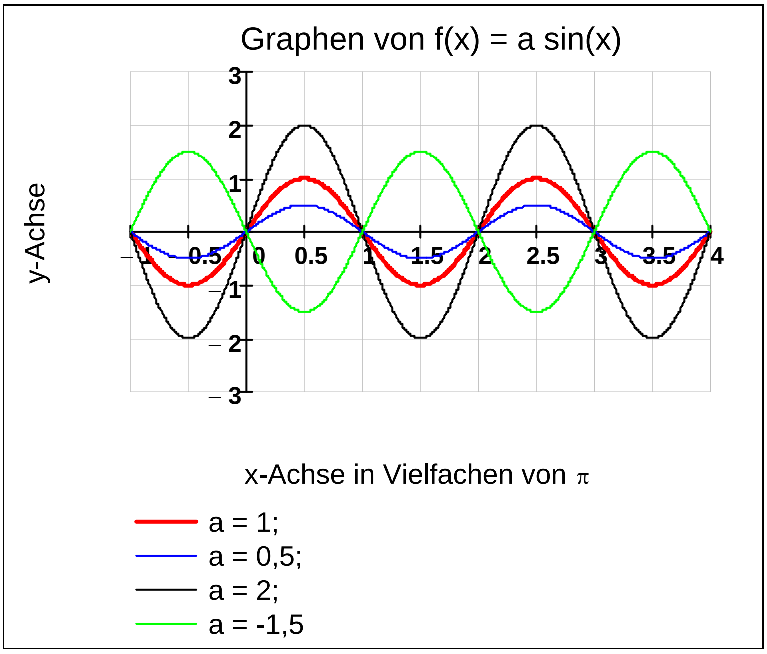
$f_2(x) = 0{,}5 \cdot \sin(x)$

$f_3(x) = 2 \cdot \sin(x)$

$f_4(x) = -1{,}5 \cdot \sin(x)$

Jeder Funktionswert der Grundfunktion $g(x) = \sin(x)$ wird mit a multipliziert.

Der Graph von f_a wird in Richtung der y-Achse gestaucht ($|a| < 1 \wedge a \neq 0$) oder gestreckt ($|a| > 1$).



Beispiel 2

$f_b(x) = \sin(b\,x)$

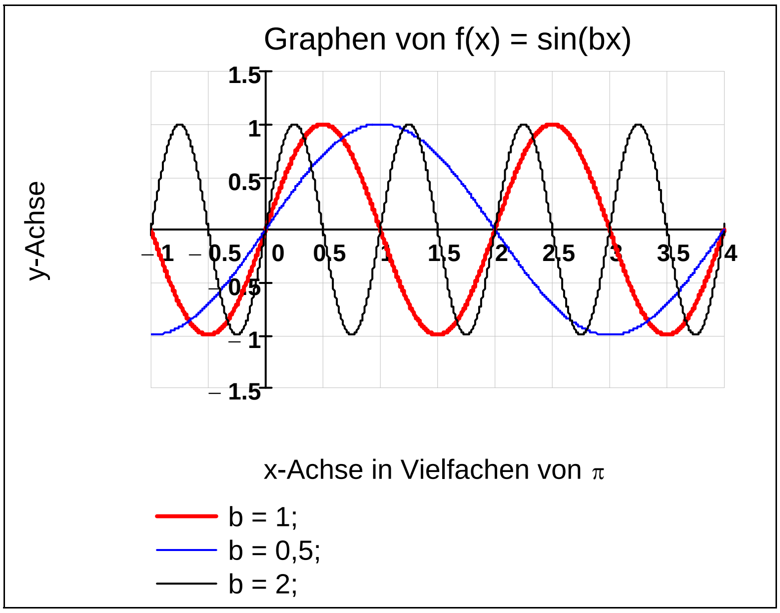
$f_1(x) = \sin(x)$

$f_2(x) = \sin(0{,}5\,x)$

$f_3(x) = \sin(2\,x)$

Der Graph von f_b wird in Richtung der x-Achse gestaucht ($|b| > 1$) oder gestreckt ($|b| < 1 \wedge b \neq 0$).

Periodenlänge: $p = \frac{2\pi}{|b|}$



Nullstellen: $\sin(b\,x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b\,x = k \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{k \cdot \pi}{b} \ \wedge\ k \in \mathbb{Z}$

Beispiel 3

$f_c(x) = \sin(x + c)$

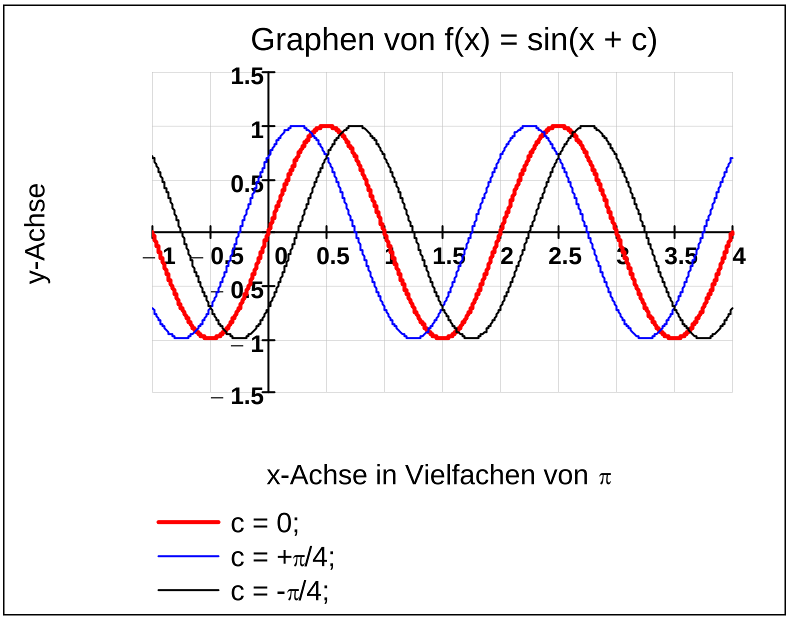
$f_1(x) = \sin(x)$

$f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f_3(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Der Graph von f_c wird in Richtung der x-Achse verschoben, für c > 0 nach links und für c < 0 nach rechts.

Phasenwinkel: $\varphi = -c$



Nullstellen: $\sin(x + c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + c = k \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = k \cdot \pi - c \;\wedge\; k \in \mathbb{Z}$

Beispiel 4

$f_{b,c}(x) = \sin(b\,x + c)$

$f_1(x) = \sin(x)\,;\; \varphi_1 = 0$

$f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\pi}{4}\right)$

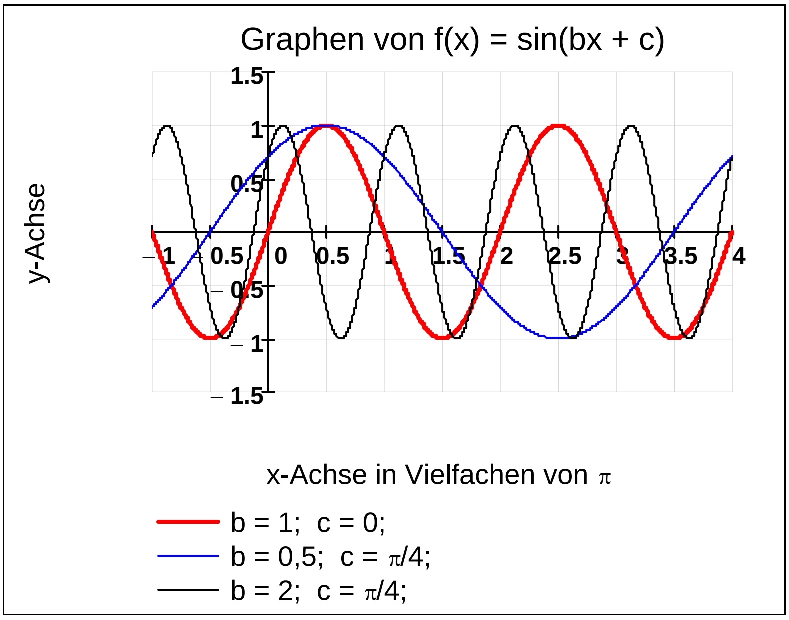
$= \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ nach links

$f_3(x) = \sin\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right)$

$\varphi_3 = \frac{\pi}{8}$ nach links



Phasenwinkel: $\varphi = -\frac{c}{b}$.

Der Graph von f_c wird in Richtung der x-Achse verschoben, für $\varphi > 0$ nach links und für $\varphi < 0$ nach rechts.

Nullstellen: $\sin(b\,x + c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b\,x + c = k \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{k \cdot \pi - c}{b} \;\wedge\; k \in \mathbb{Z}$

Beispiel 5

$f_d(x) = \sin(x) + d$

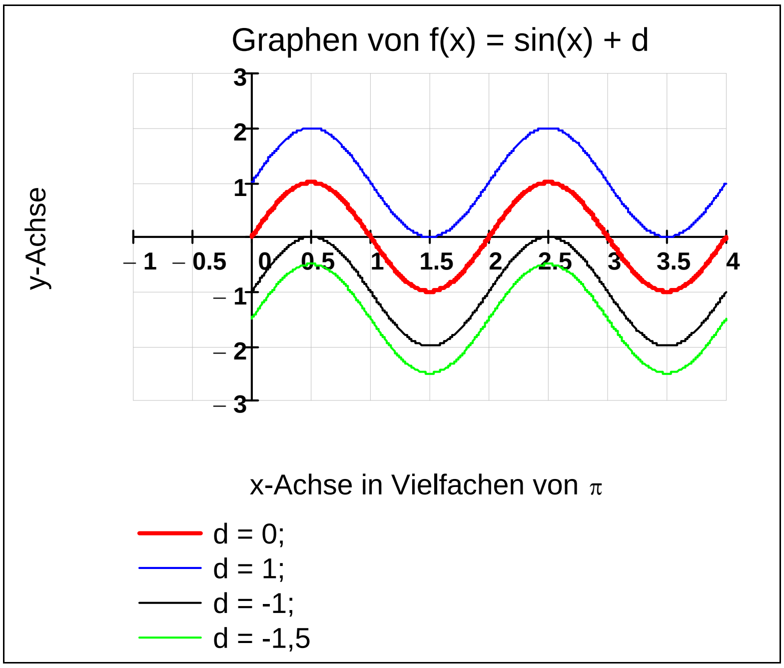
$f_1(x) = \sin(x)$

$f_2(x) = \sin(x) + 1$

$f_3(x) = \sin(x) - 1$

$f_4(x) = \sin(x) - 1{,}5$

Der Graph von f_d wird in Richtung der y-Achse verschoben, für d > 0 nach oben und für d < 0 nach unten.



7.2 Zusammenfassung

$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$, wobei $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c, d \in \mathbb{R}$.

Amplitude: $A = |a|$

Periodenlänge: $p = \frac{2\pi}{|b|}$

Kreisfrequenz: $\omega = |b|$

Phasenwinkel: $\varphi = -\frac{c}{b}$

Wertemenge: $W = [\, d - |a|;\, d + |a| \,]$

Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \sin(bx + c) + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(bx + c) = -\frac{d}{a}$

Substitution: $bx + c = u \quad \Leftrightarrow \quad \sin(u) = -\frac{d}{a} \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right)$

Falls $-\frac{d}{a} > 0$:

Lösung im ersten Quadranten: $u_1 = u_0 = \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right)$

Lösung im zweiten Quadranten: $u_2 = \pi - u_0 = \pi - \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right)$

Resubstitution:

$$b\,x + c = u_1 \quad \Leftrightarrow \quad b\,x + c = \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{b}\cdot\left[\arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) - c\right]$$

$$b\,x + c = u_2 \quad \Leftrightarrow \quad b\,x + c = \pi - \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{b}\cdot\left[\pi - \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) - c\right]$$

Alle Lösungen:

$$x_1 = \frac{1}{b}\cdot\left[\arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) - c\right] + k\cdot\frac{2\pi}{|b|} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{1}{b}\cdot\left[\pi - \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) - c\right] + k\cdot\frac{2\pi}{|b|} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Falls $-\frac{d}{a} < 0$:

Lösung im dritten Quadranten: $u_1 = \pi + u_0 = \pi + \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right)$

Lösung im vierten Quadranten: $u_2 = 2\pi - u_0 = 2\pi - \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right)$

Resubstitution:

$$b\,x + c = u_1 \quad \Leftrightarrow \quad b\,x + c = \pi + \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{b}\cdot\left[\pi + \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) - c\right]$$

$$b\,x + c = u_2 \quad \Leftrightarrow \quad b\,x + c = 2\pi - \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{b}\cdot\left[2\pi - \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) - c\right]$$

Alle Lösungen:

$$x_1 = \frac{1}{b}\cdot\left[\pi + \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) - c\right] + k\cdot\frac{2\pi}{|b|} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{1}{b}\cdot\left[2\pi - \arcsin\left(\left|-\frac{d}{a}\right|\right) - c\right] + k\cdot\frac{2\pi}{|b|} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ mit $x \in IR$.

Gesucht sind alle Nullstellen.

Lösung:

Nullstellenbedingung: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$

Substitution: $2x - \frac{\pi}{2} = u \quad \Leftrightarrow \quad \sin(u) = \frac{1}{3}$

Bemerkung: Sinus ist positiv im ersten oder zweiten Quadranten.

Nullstelle: Taschenrechner auf ***Rad*** stellen, $u_0 = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}340$

Der Taschenrechner liefert die Lösung im ersten Quadranten, der Sinuswert ist positiv.

Im ersten Quadranten: $u_1 = u_0 = 0{,}340$

Im zweiten Quadranten: $u_2 = \pi - u_0 = \pi - 0{,}340 = 2{,}802$

Resubstitution:

$$2x - \frac{\pi}{2} = u_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - \frac{\pi}{2} = 0{,}340 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0{,}955$$

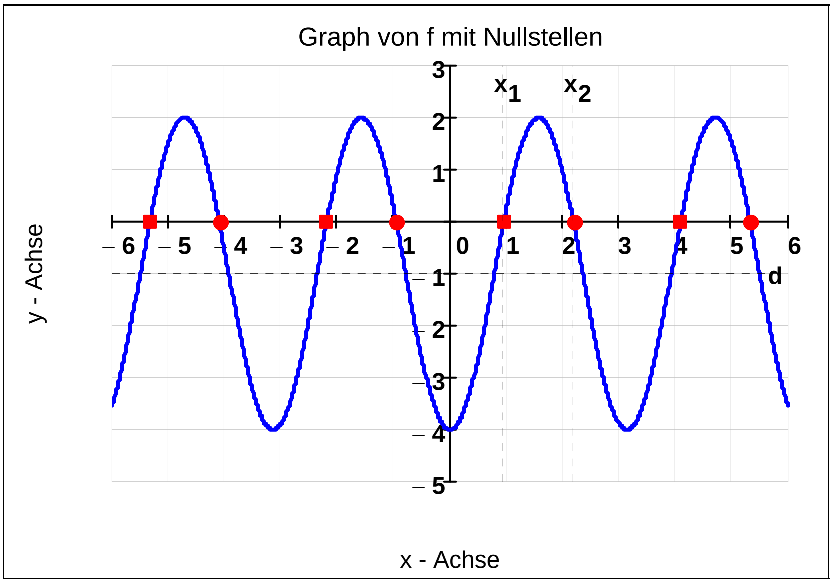
$$2x - \frac{\pi}{2} = u_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - \frac{\pi}{2} = 2{,}802 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2{,}186$$

Die weiteren Lösungen bekommt man durch Addieren bzw. Subtrahieren mit Vielfachen der Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$:

$$x_1(k) = 0{,}955 + k \cdot \pi\,; \; x_2(k) = 2{,}186 + k \cdot \pi\,; \; k \in \mathbb{Z}.$$

In Abhängigkeit von der Definitionsmenge werden die entsprechenden k-Werte für die Nullstellen ausgewählt: $D = [-6;\, 6]$

Menge der Nullstellen: $L_0 = \{-5{,}33;\, -4{,}10;\, -2{,}19;\, -0{,}96;\, 0{,}96;\, 2{,}19;\, 4{,}10;\, 5{,}33\}$



Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Gesucht sind alle Nullstellen.

Lösung:

Nullstellenbedingung: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}$

Substitution: $2x - \frac{\pi}{2} = u \quad \Leftrightarrow \quad \sin(u) = -\frac{1}{3}$

Bemerkung: Sinus ist negativ im dritten oder vierten Quadranten.

Nullstelle: Taschenrechner auf ***Rad*** stellen, $u_0 = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = -0{,}340$

Der Taschenrechner liefert einen negativen spitzen Winkel, der in die stumpfen Winkel im dritten und vierten Quadranten umgerechnet werden muss.

Es wird grundsätzlich zunächst die Lösung im ersten Quadranten berechnet!

Im ersten Quadranten: $u_0 = \arcsin\left(\left|-\frac{1}{3}\right|\right) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}340$

Im dritten Quadranten: $u_1 = \pi + u_0 = \pi + 0{,}340 = 3{,}482$

Im vierten Quadranten: $u_2 = 2\pi - u_0 = 2\pi - 0{,}340 = 5{,}943$

Resubstitution:

$$2x - \frac{\pi}{2} = u_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - \frac{\pi}{2} = 3{,}482 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2{,}526$$

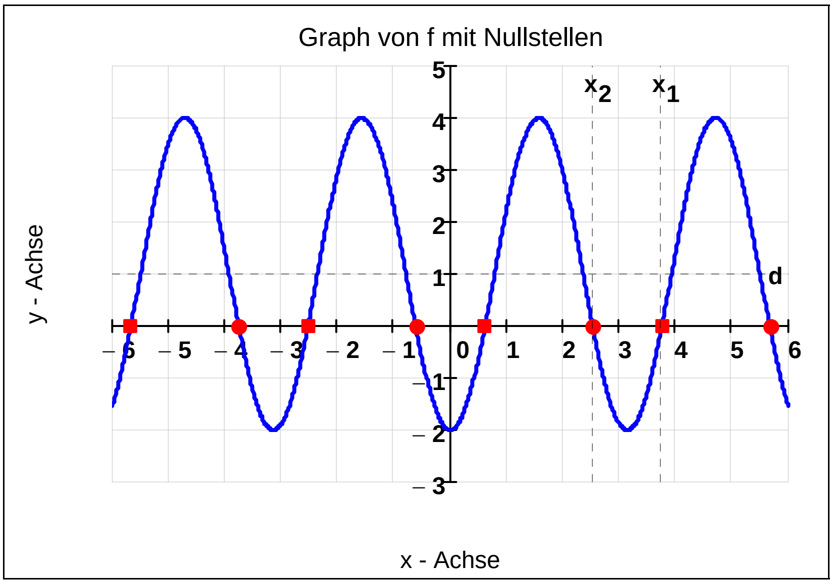
$2x - \frac{\pi}{2} = u_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - \frac{\pi}{2} = 5{,}943 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 3{,}757$

Die weiteren Lösungen bekommt man durch Addieren bzw. Subtrahieren mit Vielfachen der Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$:

$x_1(k) = 2{,}526 + k \cdot \pi$; $x_2(k) = 3{,}757 + k \cdot \pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

In Abhängigkeit von der Definitionsmenge werden die entsprechenden k-Werte für die Nullstellen ausgewählt. $D = [-6; 6]$

Menge der Nullstellen: $L_0 = \{-5{,}67; -3{,}76; -2{,}53; -0{,}62; 0{,}62; 2{,}53; 3{,}76; 5{,}67\}$



8 Goniometrische Gleichungen

Definition
Gleichungen, in denen die Variable als Argument von Winkelfunktionen vorkommen, nennt man ***goniometrische Gleichungen***.

Durch die Vielfalt der formen bei goniometrischen Gleichungen können nur für einfache ausgewählte Gleichungstypen systematische Verfahren angegeben werden. Ansonsten muss zum Lösen ein Näherungsverfahren (z. B. das Newton-Verfahren) angewendet werden.

Zum Lösen von goniometrischen Gleichungen unterscheidet man folgende Gleichungstypen:

- Gleichungen mit nur einer Winkelfunktion gleichen Arguments (Typ 1)
- Gleichungen mit nur einer Winkelfunktion verschiedener Argumente (Typ 2)
- Gleichungen mit zwei Winkelfunktionen gleichen Arguments (Typ 3)
- Gleichungen mit zwei Winkelfunktionen verschiedener Argumente (Typ 4)

Beispiel 1: Gleichungstyp (1)

Gegeben ist die Gleichung $\cos(x) + 2 \cdot (\cos(x))^2 = 1$ mit $x \in IR$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

Lösungsansatz: Substitution: $u = \cos(x)$

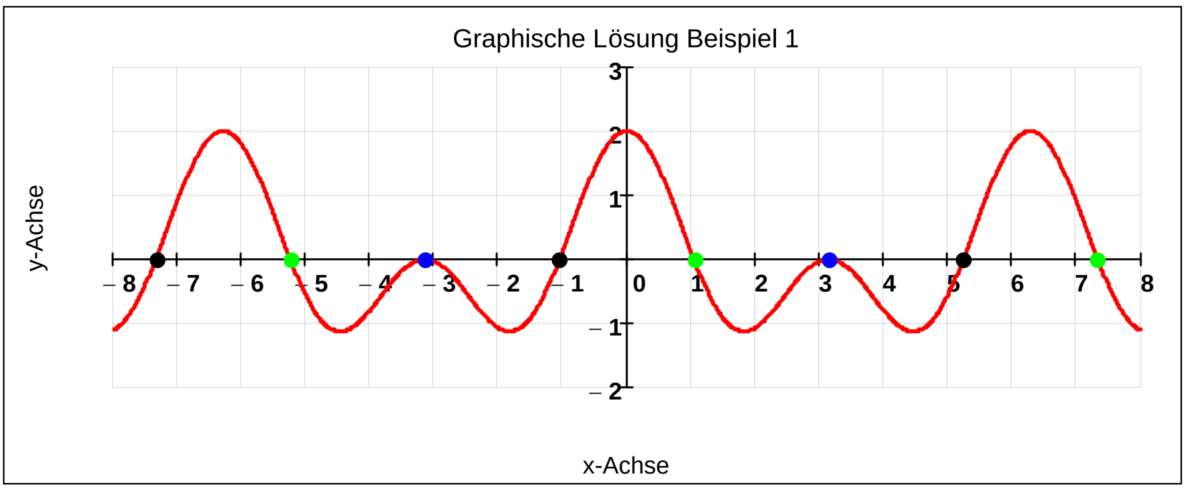
Neue Gleichung und Lösung: $2u^2 + u - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = -1;\ u_2 = \frac{1}{2};$

Resubstitution:

$$\cos(x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \pi + k \cdot 2\pi = (2k+1) \cdot \pi;$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; \quad x_3 = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi;$$

Konkrete Lösungen für $x \in [-8; 8]$: $L = \left\{ \frac{-7\pi}{3}; \frac{-5\pi}{3}; -\pi; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right\}$



Beispiel 2: Gleichungstyp (2)

Gegeben ist die Gleichung $\sin(x)+\sin(2x)=0$ mit $x \in IR$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

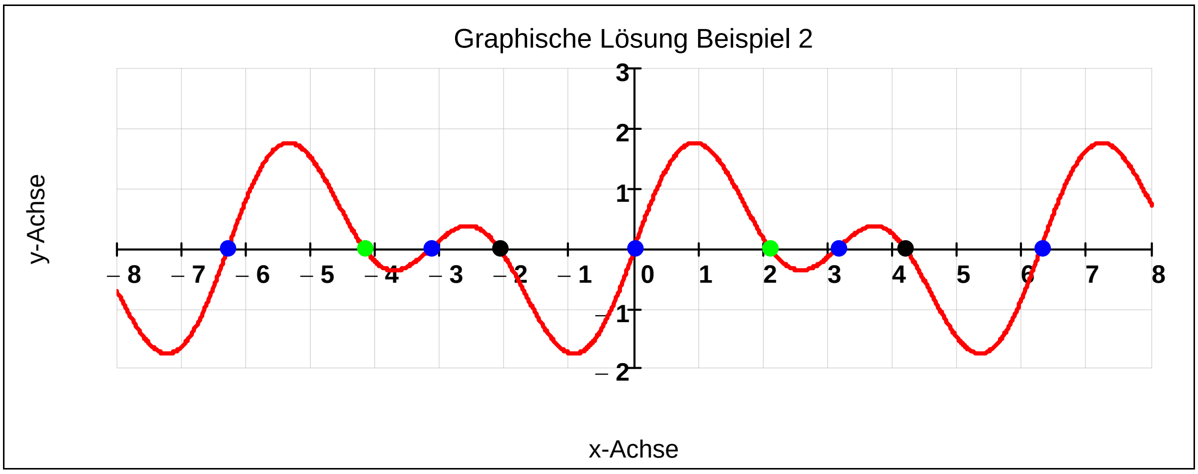
Lösungsansatz: Verwendung Additionstheorem: $\sin(2\varphi)=2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$

Neue Gleichung: $\sin(x)+2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x)\cdot(1+2\cdot\cos(x))=0$

1. Fall: $\sin(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=k\cdot\pi;$ mit $k\in\mathbb{Z}$.

2. Fall: $1+2\cdot\cos(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)=-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2=\frac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi; \quad x_3=\frac{4\pi}{3}+k\cdot 2\pi;$

Konkrete Lösungen für $x\in[-8;8]$: $L=\left\{-2\pi;\ \frac{-4\pi}{3};\ -\pi;\ \frac{-2\pi}{3};\ 0;\ \frac{2\pi}{3};\ \pi;\ \frac{4\pi}{3};2\pi\right\}$



Beispiel 3: Gleichungstyp (3)

Gegeben ist die Gleichung $(\cos(x))^3-2\cos(x)\cdot(\sin(x))^2=0$ mit $x\in IR$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

Lösungsansatz: Ausklammern: $\cos(x)\cdot\left\{(\cos(x))^2-2\cdot(\sin(x))^2\right\}=0$

Reduzieren auf eine Winkelfunktion mithilfe von: $(\sin(\varphi))^2+(\cos(\varphi))^2=1$

Neue Gleichung: $\cos(x)\cdot\left\{1-(\sin(x))^2-2\cdot(\sin(x))^2\right\}=0$

Vereinfachen: $\cos(x)\cdot\left\{1-3\cdot(\sin(x))^2\right\}=0$

1. Fall: $\cos(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}=(2k+1)\cdot 1{,}571;$

2. Fall: $1-3\cdot(\sin(x))^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sin(x))^2=\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x)=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm 0{,}577;$

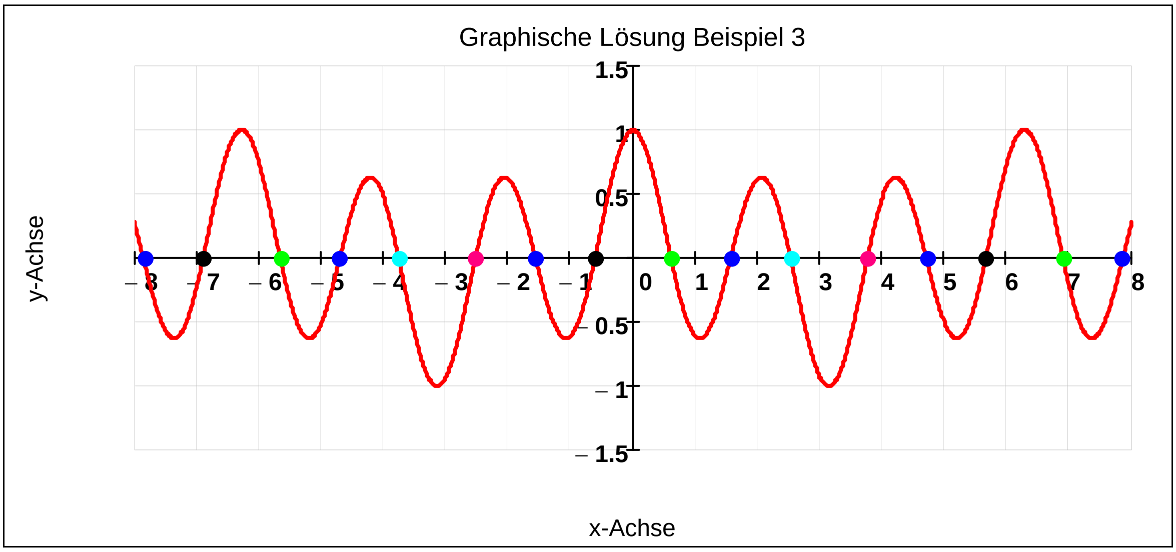
$x_{01} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0{,}615;\quad x_{02} = \arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -0{,}615;$

$x_2 = 0{,}615 + k \cdot 2\pi;\qquad x_3 = \pi - 0{,}615 + k \cdot 2\pi = 2{,}526 + k \cdot 2\pi;$

$x_4 = \pi + 0{,}615 + k \cdot 2\pi = 3{,}757 + k \cdot 2\pi;\qquad x_5 = 2\pi - 0{,}615 + k \cdot 2\pi = 5{,}668 + k \cdot 2\pi;$

Konkrete Lösungen für $x \in [-8; 8]$:

$L = \{-7{,}9; -6{,}9; -5{,}7; -4{,}7; -3{,}8; -2{,}5; -1{,}6; -0{,}6; 0{,}6; 1{,}6; 2{,}5; 3{,}8; 4{,}7; 5{,}7; 6{,}9; 7{,}0\}$



Beispiel 4: Gleichungstyp (4)

Gegeben ist die Gleichung $1 - \sin(x) = \cos(x)$ mit $x \in IR$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

Lösungsansatz:

Reduzieren auf eine Winkelfunktion mithilfe von: $(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2 = 1$

Neue Gleichung: $1 - \sin(x) = \sqrt{1 - (\sin(x))^2}$

Quadrieren: $1 - 2\sin(x) + (\sin(x))^2 = 1 - (\sin(x))^2$ Probe nötig!!!

Zusammenfassen: $2(\sin(x))^2 - 2\sin(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x) \cdot (\sin(x) - 1) = 0$

1. Fall: $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1(k) = k \cdot \pi;$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

2. Fall: $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x_2(k) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi;$

Probe:

$x_{11} = -2\pi;\quad 1 - \sin(-2\pi) = \cos(-2\pi) \Leftrightarrow 1 = 1$ Lösung

$x_{12} = -\pi;\quad 1 - \sin(-\pi) = \cos(-\pi) \Leftrightarrow 1 = -1$ keine Lösung

$x_{13} = 0;$ $1 - \sin(0) = \cos(0) \;\Leftrightarrow\; 1 = 1$ Lösung

$x_{14} = \pi;$ $1 - \sin(\pi) = \cos(\pi) \;\Leftrightarrow\; 1 = -1$ keine Lösung

$x_{15} = 2\pi;$ $1 - \sin(2\pi) = \cos(2\pi) \;\Leftrightarrow\; 1 = 1$ Lösung

D. h. alle geraden Vielfachen von π sind Lösung.

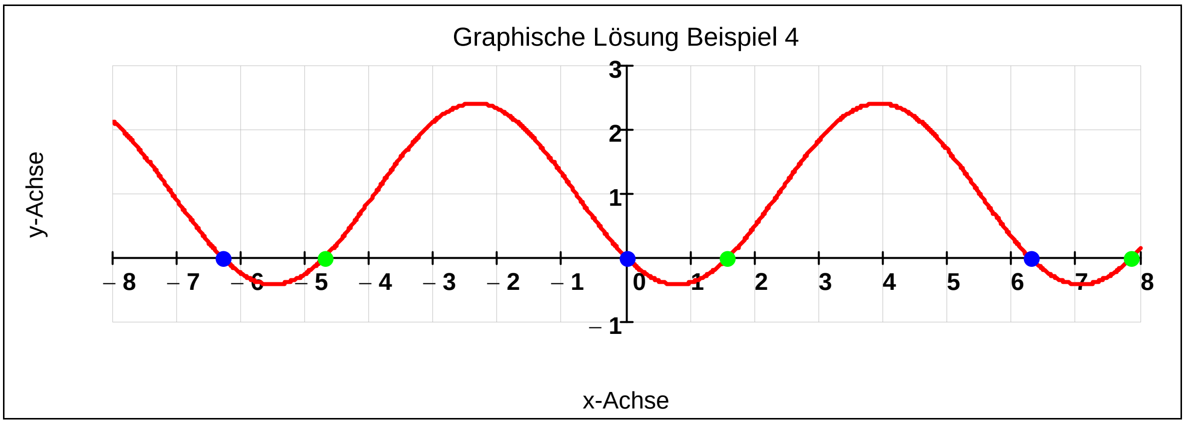
$x_{21} = \frac{-3\pi}{2};$ $1 - \sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; 1 - 1 = 0$ Lösung

$x_{22} = \frac{\pi}{2};$ $1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; 1 - 1 = 0$ Lösung

$x_{22} = \frac{5\pi}{2};$ $1 - \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; 1 - 1 = 0$ Lösung

D. h. alle $x_2(k) = (4k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sind Lösung.

Konkrete Lösungen für $x \in [-8; 8]$: $L = \left\{ -2\pi; \frac{-3\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{5\pi}{2}; \right\}$



<u>Beispiel 5: Gleichungstyp (5)</u>

Gegeben ist die Gleichung $\sin(x) = \cos(2x)$ mit $x \in \mathrm{IR}$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

Lösungsansatz:

Reduzieren auf eine Winkelfunktion mithilfe von: $\cos(2\varphi) = 1 - 2(\sin(\varphi))^2$

Umformung: $\sin(x) = 1 - 2(\sin(x))^2 \;\Leftrightarrow\; 2(\sin(x))^2 + \sin(x) - 1 = 0$

Substitution: $\sin(x) = u$

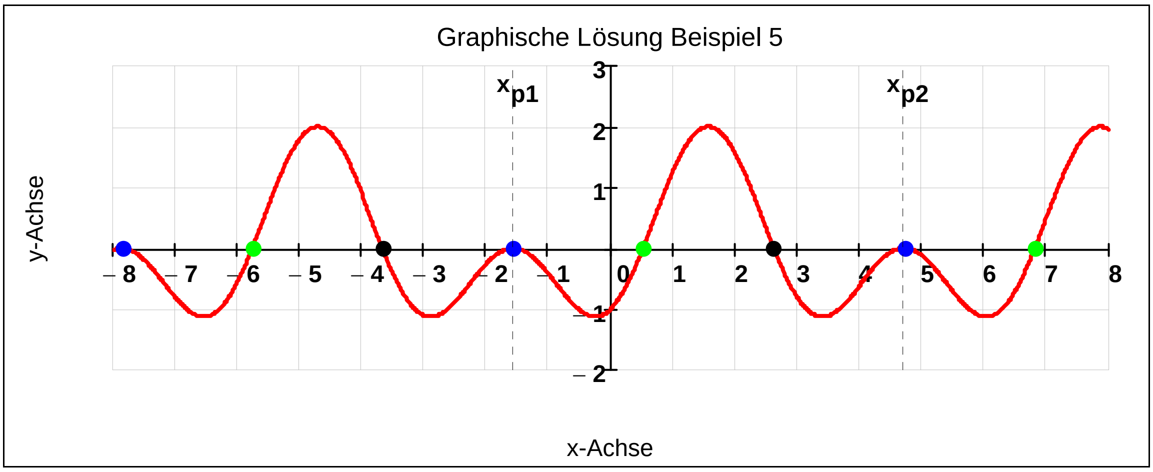
Quadratische Gleichung: $2u^2 + u - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; u_1 = -1;\ u_2 = \frac{1}{2};$

Resubstitution:

$\sin(x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1(k) = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\,;$

$\sin(x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2(k) = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi;\;\; x_3(k) = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi;$

Konkrete Lösungen für $x \in [-8;\, 8]$: $L = \left\{ \frac{-5\pi}{2}; \frac{-11\pi}{6}; \frac{-7\pi}{6}; \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{13\pi}{6} \right\}$



Beispiel 6: Gleichungstyp (6)

Gegeben ist die Gleichung $\sin(2x) = \cos(x)$ mit $x \in IR$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

Lösungsansatz: Reduzieren auf eine Winkelfunktion mithilfe von: $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$

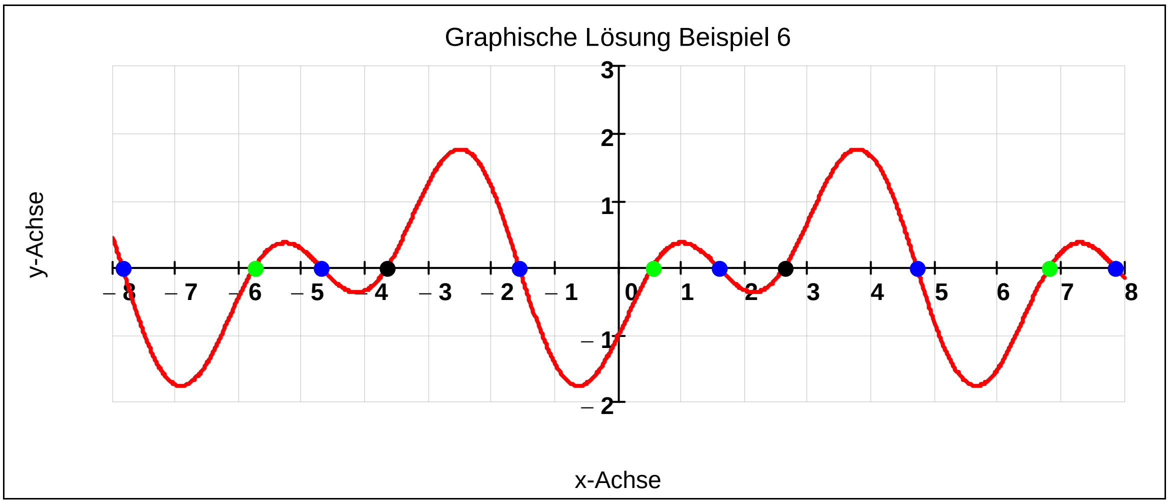
Umformung: $2\sin(x)\cdot\cos(x) = \cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)\cdot(2\sin(x) - 1) = 0$

1. Fall: $\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1(k) = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\,;$

2. Fall: $2\sin(x) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2(k) = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi;\;\; x_3(k) = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi;$

Konkrete Lösungen für $x \in [-8;\, 8]$:

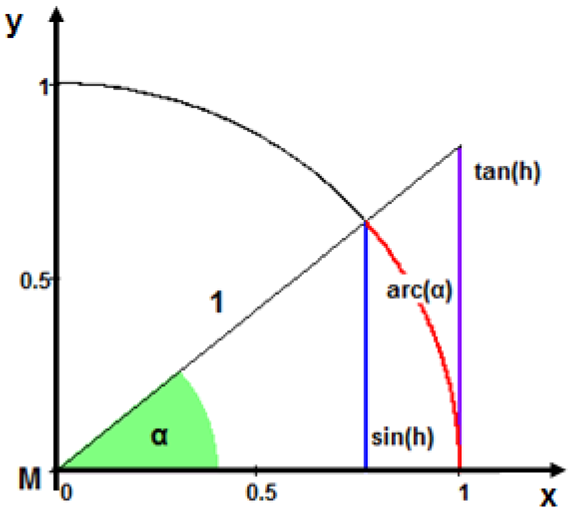
$L = \left\{ \frac{-5\pi}{2}; \frac{-11\pi}{6}; \frac{-3\pi}{2}; \frac{-7\pi}{6}; \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{2} \right\}$


Graphische Lösung Beispiel 6
y-Achse
x-Achse
3
2
1
– 1
– 2
– 8
– 7
– 6
– 5
– 4
– 3
– 2
– 1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

9 Differentiation von Winkelfunktionen

9.1 Ein besonderer Grenzwert

Gegeben ist der Einheitskreis und ein Winkel α mit dem Bogenmaß $\operatorname{arc}(\alpha) = h$, wobei $0 < h < \frac{\pi}{2}$.



Behauptung: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \to 1$

Beweis

Abschätzung: $\sin(h) < h < \tan(h) \quad \big| : \sin(h) \neq 0$

Dividieren: $\frac{\sin(h)}{\sin(h)} < \frac{h}{\sin(h)} < \frac{\tan(h)}{\sin(h)}$

Vereinfachen: $1 < \frac{h}{\sin(h)} < \frac{1}{\cos(h)}$

Linke Seite der Ungleichung: $1 < \frac{h}{\sin(h)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(h)}{h} < 1 \quad (*)$

Rechte Seite der Ungleichung: $\frac{h}{\sin(h)} < \frac{1}{\cos(h)} \quad \Rightarrow \quad \cos(h) < \frac{\sin(h)}{h} \quad (**)$

Zusammenfassung von (*) und (**): $\cos(h) < \frac{\sin(h)}{h} < 1$

Grenzwertbetrachtung: $\lim\limits_{h \to 0} [\cos(h)] < \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{\sin(h)}{h}\right] < 1$

Mit $\lim\limits_{h \to 0} [\cos(h)] \to 1$ folgt: $1 < \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{\sin(h)}{h}\right] < 1$

Deshalb gilt: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \to 1$

9.2 Die Ableitung der Sinusfunktion

Satz

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $\mathbf{f(x) = sin(x)}$.
Dann gilt für die Ableitungsfunktion: $\mathbf{f'(x) = cos(x)}$

Beweis

Ansatz mithilfe des Differentialquotienten:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ gilt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}$$

Vereinfachen:

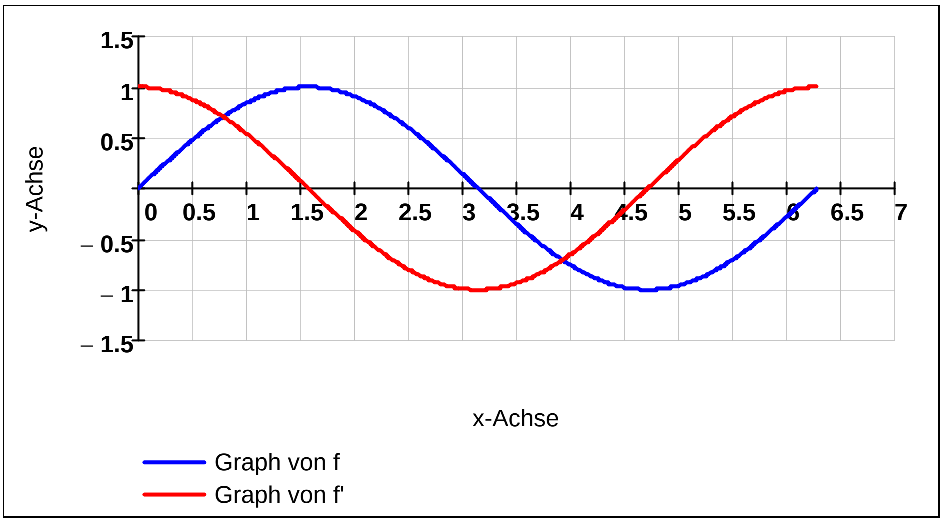
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Umformen nach den Grenzwertregeln:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right] \cdot \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]$$

Berechnen der Grenzwerte:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{2x}{2}\right) \cdot 1 = \cos(x)$$



9.3 Die Ableitung der Kosinusfunktion

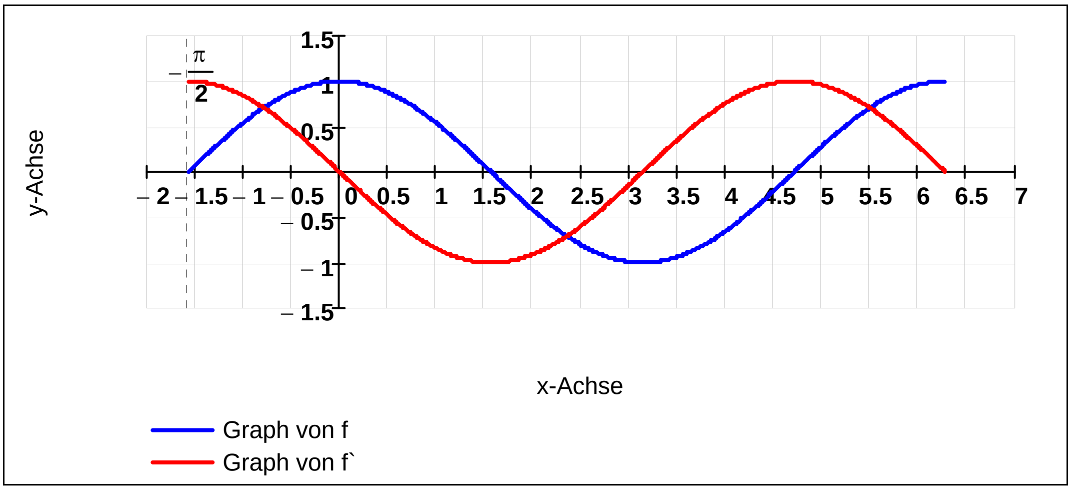
<u>Satz</u>

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $\mathbf{f(x) = cos(x)}$.
Dann gilt für die Ableitungsfunktion: $\mathbf{f'(x) = -sin(x)}$

<u>Beweis</u>

Umformung: $f(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Ableitung mithilfe der Kettenregel: $f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$



9.4 Die Ableitung der Tangensfunktion

Satz

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $\mathbf{f(x) = tan(x)}$.

Dann gilt für die Ableitungsfunktion: $\mathbf{f'(x) = \dfrac{1}{(cos(x))^2} = 1 + (tan(x))^2}$

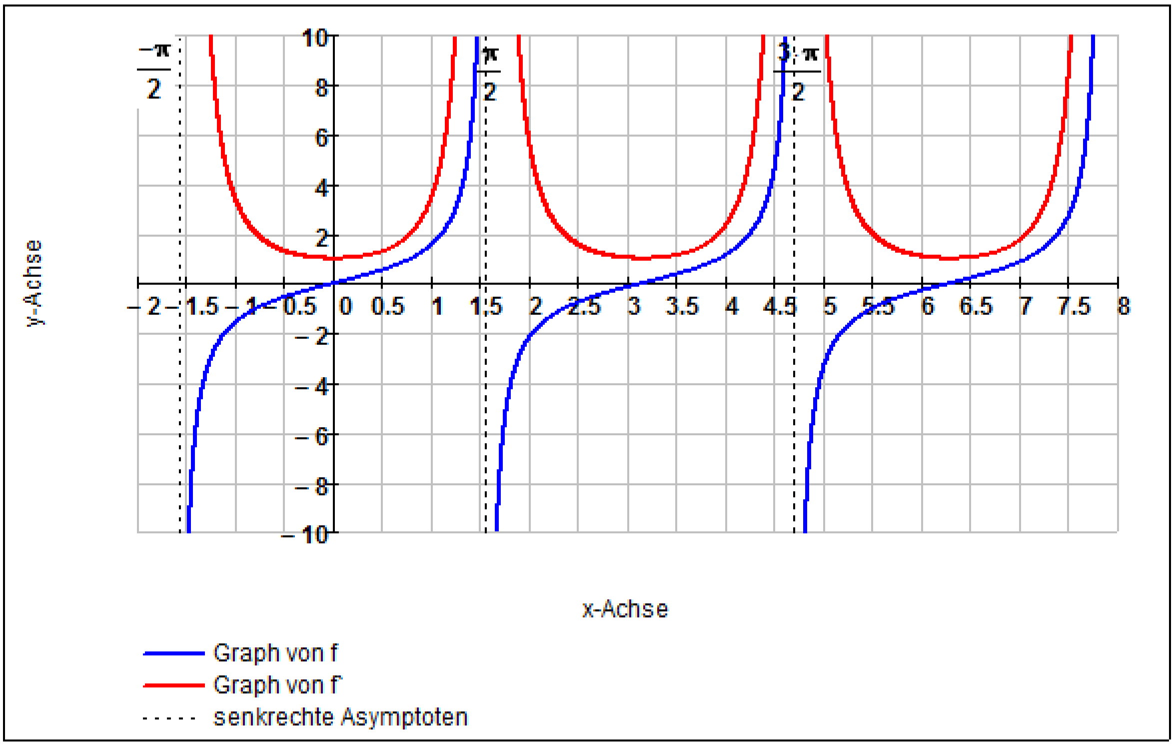
Beweis

Umformung: $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Ableitung mithilfe der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

$$= 1 + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$$



10 Integration von Winkelfunktionen

10.1 Verkettete Sinusfunktionen

Funktionstyp 1: $f(x) = \sin(x)$

Stammfunktion: $F(x) = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + K$

Funktionstyp 2: $f(x) = \sin(a\,x + b)$

Stammfunktion: $F(x) = \int \sin(a\,x + b)\,dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(a\,x + b) + K$

Beispiel 1

Funktionsterm: $f_1(x) = \sin(2\,x + 1)$

Stammfunktion: $F_1(x) = \int \sin(2\,x + 1)\,dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2\,x + 1) + K$

Beispiel 2

Funktionsterm: $f_2(x) = \sin(0{,}5\,x + 1)$

Stammfunktion: $F_2(x) = \int \sin(0{,}5\,x + 1)\,dx = -\frac{1}{0{,}5} \cdot \cos(0{,}5\,x + 1) + K = -2 \cdot \cos(0{,}5\,x + 1) + K$

10.2 Verkettete Kosinusfunktionen

Funktionstyp 3: $f(x) = \cos(x)$

Stammfunktion: $F(x) = \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + K$

Funktionstyp 4: $f(x) = \cos(a\,x + b)$

Stammfunktion: $F(x) = \int \cos(a\,x + b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(a\,x + b) + K$

Beispiel 3

Funktionsterm: $f_3(x) = \cos(2\,x + 1)$

Stammfunktion: $F_3(x) = \int \cos(2\,x + 1)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\,x + 1) + K$

Beispiel 4

Funktionsterm: $f_4(x) = \cos(0{,}5\,x + 1)$

Stammfunktion: $F_4(x) = \int \cos(0{,}5\,x + 1)\,dx = \frac{1}{0{,}5} \cdot \sin(0{,}5\,x + 1) + K = 2 \cdot \sin(0{,}5\,x + 1) + K$

10.2 Zusammengesetzte Winkelfunktionen

Folgende Funktionen sind für physikalische Anwendungen (z. B. im Wechselstromkreis) wichtig. Die entsprechenden Umformungen (z. b. Additionstheoreme) werden der Merkhilfe entnommen.

Funktionstyp 5: $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

Stammfunktion:

$$F(x) = \int \left(\sin(x) \cdot \cos(x)\right) dx = \int \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(-2 \cdot \cos(2x)\right) + K = -\cos(2x) + K$$

<u>Beispiel 5</u>

Funktionsterm: $f_5(t) = \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$

Stammfunktion:

$$F_5(t) = \int \left(\sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)\right) dt = \int \frac{1}{2} \cdot \left(\sin(\omega t)\right) dt = \frac{1}{2}\left(-\cos(\omega t) \cdot \frac{1}{\omega}\right) + K = -\frac{1}{2\omega} \cdot \cos(\omega t) + K$$

Funktionstyp 6: $f(x) = \left(\sin(x)\right)^2$

Stammfunktion:

$$F(x) = \int \left(\sin(x)\right)^2 dx = \int \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos(2x)\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)\right) + K = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cdot \sin(2x) + K$$

<u>Beispiel 6</u>

Funktionsterm: $f_6(x) = \left(\sin(2x+3)\right)^2$

Stammfunktion:

$$F_6(x) = \int \left(\sin(2x+3)\right)^2 dx = \int \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos(4x+6)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x - \sin(4x+6) \cdot \frac{1}{4}\right) + K = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin(4x+6) + K$$

<u>Beispiel 7</u>

Funktionsterm: $f_7(t) = \left(\sin(\omega t)\right)^2$

Stammfunktion:

$$F_7(t) = \int \left(\sin(\omega t)\right)^2 dt = \int \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos(2\omega t)\right) dt = \frac{1}{2} \cdot \left(t - \sin(2\omega t) \cdot \frac{1}{2\omega}\right) + K$$