Ganzrationale Funktionen - Aufgaben 1

- Symmetrie und Nullstellen

Definition des Feldindex in Vektoren und Matrizen: **ORIGIN := 1**

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Funktionen f_i auf Symmetrie und Nullstellen. Geben Sie, wenn möglich, den vollständig faktorisierten Funktionsterm an.

a) $f_1(x) := \frac{1}{6}\cdot\left(4\cdot x^3 - 4\cdot x^2 - 41\cdot x + 21\right)$

b) $f_2(x) := \frac{1}{2}\cdot x^4 - 4\cdot x^2$

c) $f_3(x) := \frac{1}{12}\cdot x^3 + \frac{1}{3}\cdot x$

d) $f_4(x) := \frac{1}{2}\cdot x^4 + \frac{1}{2}\cdot x^2 - 6$

e) $f_5(x) := \frac{1}{10}\cdot\left(4\cdot x^3 - 20\cdot x^2 - 7\cdot x + 98\right)$

f) $f_6(x) := \frac{1}{20}\cdot\left(2\cdot x^4 + 3\cdot x^3 - 21\cdot x^2 + 25\cdot x - 9\right)$

g) $f_7(x) := \frac{1}{16}\cdot\left(x^4 + 6\cdot x^2 + 16\right)$

h) $f_8(x) := \frac{1}{20}\cdot\left(x^6 - 26\cdot x^3 - 27\right)$

Teilaufgabe a)

$$f_1(x) := \frac{1}{6}\cdot\left(4\cdot x^3 - 4\cdot x^2 - 41\cdot x + 21\right)$$

Keine Symmetrie, da der Funktionterm gerade und ungerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $4\cdot x^3 - 4\cdot x^2 - 41\cdot x + 21 = 0$

Erste Nullstelle erraten: $f_1(-3) = 0$ $(\Rightarrow)$ $x_1 := -3$

Polynomdivision:

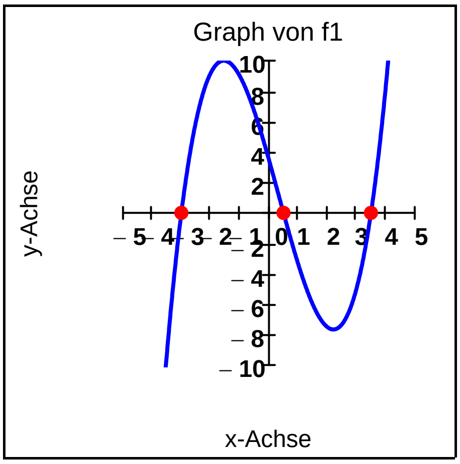
$$\frac{4\cdot x^3 - 4\cdot x^2 - 41\cdot x + 21}{x + 3} \text{ parfrac } \rightarrow 4\cdot x^2 - 16\cdot x + 7$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$4\cdot x^2 - 16\cdot x + 7 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$(\Rightarrow)$ $x_2 := \frac{1}{2}$ $x_3 := \frac{7}{2}$

$$f_1(x) = \frac{1}{6}\cdot(x + 3)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x - \frac{7}{2}\right)$$



Teilaufgabe b)

$f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^4 - 4 \cdot x^2$

Achsensymmetrie, da der Funktionterm nur gerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $\frac{1}{2} \cdot x^4 - 4 \cdot x^2 = 0$

Ausklammern: $\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \left(x^2 - 8\right) = 0$

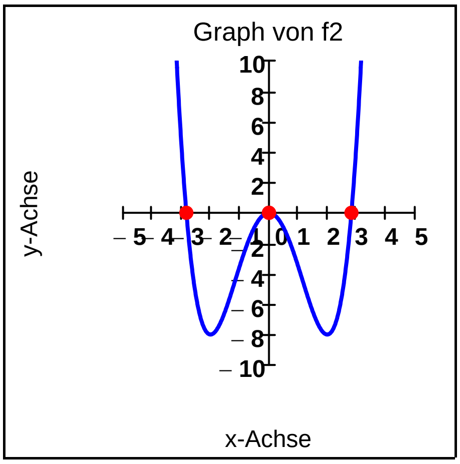
Lösung mithilfe der Produktformel:

$x^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad x_{12} = 0$

$x^2 - 8 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{2} \\ -2 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$(\Rightarrow)$ $\quad x_3 := 2 \cdot \sqrt{2} \qquad x_4 := -2 \cdot \sqrt{2}$

$f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \left(x + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(x - 2 \cdot \sqrt{2}\right)$



Teilaufgabe c)

$f_3(x) := \frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x$

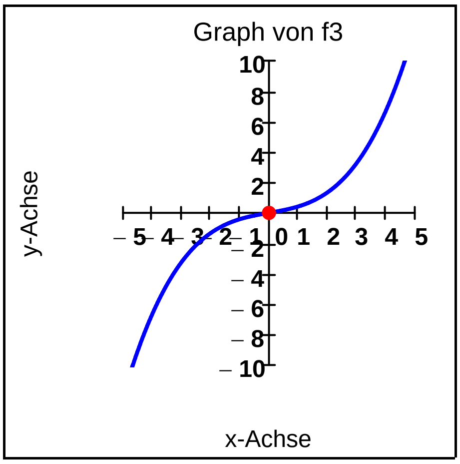
Punktsymmetrie, da der Funktionterm nur ungerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $\frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x = 0$

Ausklammern: $\frac{1}{12} \cdot x \cdot \left(x^2 + 4\right) = 0$

Lösung: $x_1 := 0$

$f_3(x) = \frac{1}{12} \cdot x \cdot \left(x^2 + 4\right)$



Teilaufgabe d)

$$f_4(x) := \frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6$$

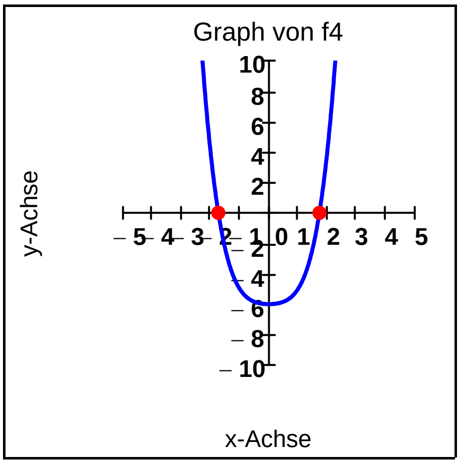
Achsensymmetrie, da der Funktionterm nur gerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $\frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6 = 0$

Substitution: $x^2 = t \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot t - 6 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot t - 6 = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Resubstitution:

$x^2 = -4 \quad (\Rightarrow) \quad$ keine Lösung

$x^2 = 3 \quad (\Rightarrow) \quad x_1 := -\sqrt{3}$

$(\Rightarrow) \quad x_2 := \sqrt{3}$

$$f_4(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \sqrt{3}\right) \cdot \left(x - \sqrt{3}\right) \cdot \left(x^2 + 4\right)$$

Teilaufgabe e)

$$f_5(x) := \frac{1}{10} \cdot \left(4 \cdot x^3 - 20 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 98\right)$$

Keine Symmetrie, da der Funktionterm gerade und ungerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $4 \cdot x^3 - 20 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 98 = 0$

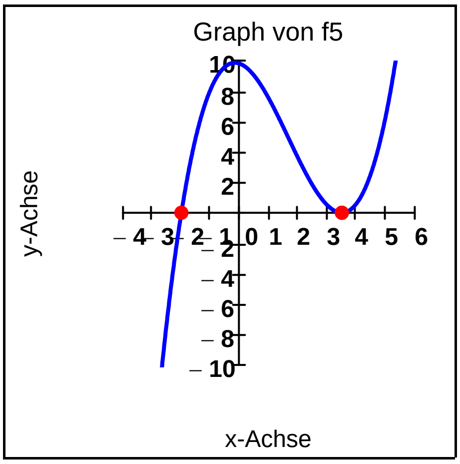
Erste Nullstelle erraten: $f_5(-2) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x_1 := -2$

Polynomdivision:

$$\frac{4\cdot x^3 - 20\cdot x^2 - 7\cdot x + 98}{x + 2} \text{ parfrac } \rightarrow 4\cdot x^2 - 28\cdot x + 49$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$4\cdot x^2 - 28\cdot x + 49 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$



$(\Rightarrow)\quad x_2 := \frac{7}{2}$

$$f_5(x) = \frac{1}{10}\cdot(x + 2)\cdot\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$$

Teilaufgabe f)

$$f_6(x) := \frac{1}{20}\cdot\left(2\cdot x^4 + 3\cdot x^3 - 21\cdot x^2 + 25\cdot x - 9\right)$$

Keine Symmetrie, da der Funktionterm gerade und ungerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $2\cdot x^4 + 3\cdot x^3 - 21\cdot x^2 + 25\cdot x - 9 = 0$

Erste Nullstelle erraten: $f_6(1) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x_1 := 1$

Polynomdivision:

$$\frac{2\cdot x^4 + 3\cdot x^3 - 21\cdot x^2 + 25\cdot x - 9}{x - 1} \text{ parfrac } \rightarrow 2\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 16\cdot x + 9$$

$$p_6(x) := 2\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 16\cdot x + 9$$

Nullstellenbedingung: $2\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 16\cdot x + 9 = 0$

Zweite Nullstelle erraten: $p_6(1) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x_2 := 1$

Polynomdivision:

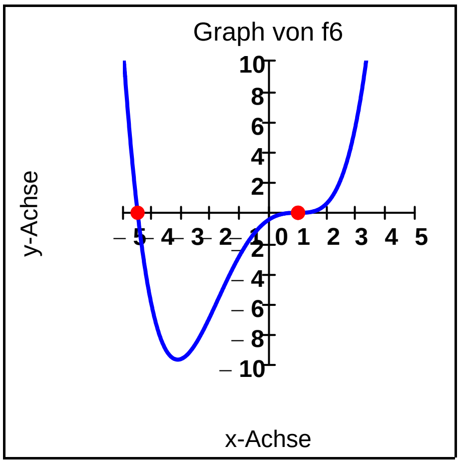
$$\frac{2\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 16\cdot x + 9}{x - 1} \text{ parfrac } \rightarrow 2\cdot x^2 + 7\cdot x - 9$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$2\cdot x^2 + 7\cdot x - 9 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$(\Rightarrow)$ $\quad x_3 := 1 \qquad x_4 := \frac{-9}{2}$

$$f_6(x) = \frac{1}{20}\cdot(x - 1)^3\cdot\left(x + \frac{9}{2}\right)$$



Teilaufgabe g)

$$f_7(x) := \frac{1}{16}\cdot\left(x^4 + 6\cdot x^2 + 16\right)$$

Achsensymmetrie, da der Funktionterm nur gerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $\quad x^4 + 6\cdot x^2 + 16 = 0$

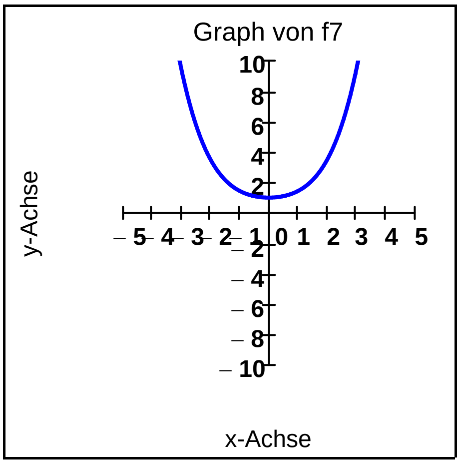
Substitution: $\quad x^2 = t \quad (\Rightarrow) \quad t^2 + 6\cdot t + 16 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$t^2 + 6\cdot t + 16 = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \begin{pmatrix} -3 + \sqrt{7}\cdot i \\ -3 - \sqrt{7}\cdot i \end{pmatrix}$$

keine reelle Lösung

keine Zerlegung möglich



Teilaufgabe h)

$$f_8(x) := \frac{1}{20}\cdot\left(x^6 - 26\cdot x^3 - 27\right)$$

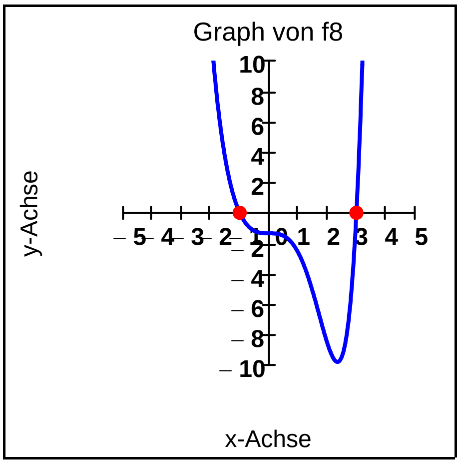
Keine Symmetrie, da der Funktionsterm gerade und ungerade Exponenten von x hat.

Nullstellenbedingung: $x^6 - 26\cdot x^3 - 27 = 0$

Substitution: $x^3 = t \quad (\Rightarrow) \quad t^2 - 26\cdot t - 27 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$t^2 - 26\cdot t - 27 = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 27 \end{pmatrix}$$



Resubstitution:

$x^3 = -1 \quad (\Rightarrow) \quad x_1 := -1$

$x^3 = 27 \quad (\Rightarrow) \quad x_2 := 3$

Teilweise faktorisiert:

$$f_8(x) = -\left(x^3 + 1\right)\cdot\left(x^3 - 27\right)$$

weiteres Faktorisieren möglich mithilfe der Formeln

$$a^3 + b^3 = (a + b)\cdot\left(a^2 - a\cdot b + b^2\right) \qquad \text{und} \qquad a^3 - b^3 = (a - b)\cdot\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right)$$

$(\Rightarrow) \quad x^3 + 1 = (x + 1)\cdot\left(x^2 - x + 1\right) \qquad (1)$

$(\Rightarrow) \quad x^3 - 27 = (x - 3)\cdot\left(x^2 + 3\cdot x + 9\right) \qquad (2)$

$$f_8(x) = \frac{1}{20}\cdot(x - 3)\cdot(x + 1)\cdot\left(x^2 - x + 1\right)\cdot\left(x^2 + 3\cdot x + 9\right)$$

Eine Zerlegung ginge jeweils auch mithilfe einer Polynomdivision:

$\frac{x^3 + 1}{x + 1} \text{ parfrac } \rightarrow x^2 - x + 1 \qquad$ vgl. (1)

$\frac{x^3 - 27}{x - 3} \text{ parfrac } \rightarrow x^2 + 3\cdot x + 9 \qquad$ vgl. (2)