Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2002

• Mathematik 13 Technik - B I - Lösung

made with mathcad

Aufgabe 1.0
Eine Zufallsgröße X ist binomial verteilt mit $n := 110$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p := 0.7$.

Aufgabe 1.1 (7 BE)
Bestimmen Sie auf zwei verschiedene Arten die Wahrscheinlichkeit $P(75 \le X \le 77)$ auf zwei Nachkommastellen genau, und geben Sie den wesentlichen Unterschied der Verfahren an.

Genaue Berechnung mithilfe Bernoulli:

$$P(75 \le X \le 77) = P(75) + P(76) + P(77) = \blacksquare$$

$$\blacksquare = \binom{110}{75} \cdot 0.7^{75} \cdot 0.3^{35} + \binom{110}{76} \cdot 0.7^{76} \cdot 0.3^{34} + \binom{110}{77} \cdot 0.7^{77} \cdot 0.3^{33}$$

$$\blacksquare = 0.07476 + 0.08033 + 0.08277 = 0.23786 = 0.24$$

Nebenrechnungen:

$$\text{combin}(110, 75) \cdot 0.7^{75} \cdot 0.3^{35} = 0.07476$$

$$\text{combin}(110, 76) \cdot 0.7^{76} \cdot 0.3^{34} = 0.08033$$

$$\text{combin}(110, 77) \cdot 0.7^{77} \cdot 0.3^{33} = 0.08277$$

Näherungsweise Berechnung mithilfe der Normalverteilung:

$$\mu := n \cdot p = 77 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4.806$$

$$P(75 \le X \le 77) = P(X \le 77) - P(X \le 74) = \Phi\left(\frac{77 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{74 - \mu + 0.5}{\sigma}\right)$$

$$\blacksquare = \Phi(0.104) - \Phi(-0.52) = \Phi(0.104) - (1 - \Phi(0.52)) = 0.54142 + 0.69847 - 1 = 0.23989 = 0.24$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{77 - \mu + 0.5}{\sigma} = 0.104 \qquad \frac{74 - \mu + 0.5}{\sigma} = -0.52$$

$$F_{Norm}(x) := \text{knorm}(x) \qquad F_{Norm}(0.104) = 0.54142 \qquad F_{Norm}(0.52) = 0.69847$$

Aufgabe 1.2 (6 BE)
Ermitteln Sie ein möglichst kleines, zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem mit mindestens 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Treffer liegt.

$$P(|X-\mu| \le c) = P(\mu - c \le X \le \mu + c) = \Phi\left(\frac{\mu + c - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - c - 1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-c-0.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right)\right) = 2\cdot\Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right) - 1$$

Bedingung: $2\cdot\Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right) - 1 \ge 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c+0.5}{\sigma}\right) \ge 0.95$

$\Phi_{invers}(y) := \text{qnorm}(y, 0, 1)$ $\qquad$ $\Phi_{invers}(0.95) = 1.645$

$\Leftrightarrow \quad \frac{c+0.5}{\sigma} \ge 1.645 \qquad c \ge 1.645\cdot\sigma - 0.5 \qquad c \ge 7.406 \qquad c_0 := 7.406$

$c := \text{ceil}(c_0) = 8$

untere Grenze. $\quad \mu - c_0 = 69.594 \quad$ aufrunden: $\quad \text{ceil}(\mu - c_0) = 70$

obere Grenze: $\quad \mu + c_0 = 84.406 \quad$ aufrunden: $\quad \text{ceil}(\mu + c_0) = 85$

Intervall: $\quad X \in [\,70\,;\,85\,]$

Probe: $\quad \Phi(k) := \text{pnorm}(k, \mu, \sigma) \qquad \Phi(85) - \Phi(69) = 0.904$

Aufgabe 2.0
In einer medizinischen Studie wurde festgestellt, dass bei zwei Drittel der untersuchten krawattentragenden, männlichen Versuchspersonen der Hemdenkragen zu eng war. Dies gefährdet nach Erkenntnissen der Ärzte den Blutzufluss zum Gehirn und zu den Sinnesorganen und mindert die Konzentrations- und Reaktionsfähigkeit.

Aufgabe 2.1 **(6 BE)**
Die angegebene relative Häufigkeit von $\frac{2}{3}$ soll bei 100 Krawattenträgern in einem zweiseitigen Signifikanztest überpüft werden. Geben Sie die Testgröße an, und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von 5 %.

Testgröße X: Anzahl der Personen mit zu engem Kragen.

Stichprobenlänge: $n := 100$

Nullhypothese H_0: $p_0 := \frac{2}{3}$

Gegenhypothese H_1: $p_1 \neq \frac{2}{3}$

Testart: Zweiseitiger Signifikanztest

Annahmebereich: $A = \{ k_1 + 1, k_1 + 2, ..., k_2 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 0, 1, ..., k_1 \} \cup \{ k_2 + 1, k_2 + 2, ..., 100 \}$

$P(X \leq k_1) \leq 0.025$ TW Seite 33 $0.01691 \Rightarrow k_1 := 56$

$P(X > k_1) = 1 - P(X \leq k_2) \leq 0.025 \Leftrightarrow P(X \leq k_2) \geq 0.975$

TW Seite 34 $0.98364 \Rightarrow k_2 := 76$

$\overline{A} = \{ 0, 1, ..., 56 \} \cup \{ 77, 78, ..., 100 \}$

Aufgabe 2.2 **(6 BE)**
Außerdem soll in einem einseitigen Signifikanztest an 500 Personen überprüft werden, ob bei einem zu engen Kragen die Bearbeitungsdauer von 50 Rechenaufgaben um mindestens 10 Sekunden länger ist als bei offenem Kragen. Geben Sie für die Nullhypothese $p \leq 0.5$ die Testgröße und die Gegenhypothese an, und ermitteln Sie einen möglichst großen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 2 %.

$n := 500$ $p := 0.5$ $p_0 := p_0$

Nullhypothese H_0: $p_0 \leq p \rightarrow p_0 \leq 0.5$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.5$

Testart: Rechtsseitiger Signifikanztest

Annahmebereich: $A = \{\ 0, 1, \dots, k\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\ k+1, k+2, \dots, 500\}$

$\mu := n \cdot p = 250 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 11.18$

$P(\overline{A}) = P(X \geq k+1) = 1 - P(X \leq k) \leq 0.02 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(X \leq k) \geq 0.98$

$\Phi\left(\dfrac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \geq 0.98$

Nebenrechnung: $\Phi_{invers}(y) := \text{qnorm}(y, 0, 1) \qquad \Phi_{invers}(0.98) = 2.054$

$\Rightarrow \quad \dfrac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \geq 2.054 \text{ auflösen}, k \ \rightarrow 272.46441812892284125 \leq k < \infty$

aufrunden: $k := 273 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{A} = \{\ 274, 275, \dots, 500\}$

Aufgabe 3.0
Wird mit einem handelsüblichen Laplace-Würfel beim ersten Wurf das Ergebnis ω_1, beim zweiten Wurf ω_2 und beim dritten Wurf ω_3 erzielt, so wird der Wert der Zufalllsgröße X ermittelt durch $X = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3$.

Aufgabe 3.1 (2 BE)
Begründen Sie, dass gilt: $-4 \leq X \leq 11$

Der Würfel hat die möglichen Ergebnisse
beim ersten Wurf: $1, 2, 3, 4, 5, 6$;
beim zweiten Wurf: $1, 2, 3, 4, 5, 6$;
beim dritten Wurf: $1, 2, 3, 4, 5, 6$

kleinster Wert: $(\omega_1 + \omega_3) = 1 + 1 \qquad \omega_2 = 6$

$X_{min} = (\omega_1 + \omega_3)_{min} - \omega_{2_{max}} = 1 + 1 - 6 = -4$

größter Wert: $(\omega_1 + \omega_3) = 6 + 6 \qquad \omega_2 = 1$

$X_{max} = (\omega_1 + \omega_3)_{max} - \omega_{2_{min}} = 6 + 6 - 1 = 11$

Aufgabe 3.2 **(4 BE)**
Ermitteln Sie die fehlenden Werte in folgender Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

$$\begin{pmatrix} x_i & -4 \vee 11 & -3 \vee 10 & -2 \vee 9 & -1 \vee 8 & 0 \vee 7 & 1 \vee 6 & 2 \vee 5 & 3 \vee 4 \\ P(X = x_i) & \frac{1}{216} & a & b & \frac{10}{216} & \frac{15}{216} & \frac{21}{216} & \frac{25}{216} & \frac{27}{216} \end{pmatrix}$$

[Zur Kontrolle: $P(X = 9) = \frac{6}{216}$]

Beim dreimaligen Werfen eines Würfels sind $6^3 = 216$ verschiedene Ausgänge möglich.

Zufallsgröße 10:

$$\omega_1 + \omega_3 - \omega_1 = 6 + 6 - 2 = 10$$
$$\omega_1 + \omega_3 - \omega_1 = 6 + 5 - 1 = 10 \qquad P(X = 10) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$$
$$\omega_1 + \omega_3 - \omega_1 = 5 + 6 - 1 = 10$$

Zufallsgröße -3:

$$\omega_1 + \omega_3 - \omega_1 = 1 + 1 - 5 = -3$$
$$\omega_1 + \omega_3 - \omega_1 = 2 + 1 - 6 = -3 \qquad P(X = -3) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$$
$$\omega_1 + \omega_3 - \omega_1 = 1 + 2 - 6 = -3$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{a = \frac{1}{72} = \frac{3}{216}}$$

NR: $$1 - \frac{2}{216} \cdot (1 + 3 + 10 + 15 + 21 + 25 + 27) = \frac{12}{216}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{b = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}}$$

Aufgabe 3.3 **(5 BE)**
Berechnen Sie den Erwartungswert E(X) und die Varianz Var(X).

$$\mu = [(-4) + 11] \cdot \frac{1}{216} + [(-3) + 10] \cdot \frac{3}{216} + [(-2) + 9] \cdot \frac{6}{216} + [(-1) + 8] \cdot \frac{10}{216} + (0 + 7) \cdot \frac{15}{216}$$

$$\ldots + (1 + 6) \cdot \frac{21}{216} + (2 + 5) \cdot \frac{25}{216} + (3 + 4) \cdot \frac{27}{216}$$

$$\boxed{\mu = \frac{7}{2} = 3.5}$$

$$\sigma = \left[(-4)^2 + 11^2\right]\cdot\frac{1}{216} + \left[(-3)^2 + 10^2\right]\cdot\frac{3}{216} + \left[(-2)^2 + 9^2\right]\cdot\frac{6}{216} + \left[(-1)^2 + 8^2\right]\cdot\frac{10}{216}$$

$$\ldots + \left[\left(0^2 + 7^2\right)\cdot\frac{15}{216} + \left(1^2 + 6^2\right)\cdot\frac{21}{216} + \left(2^2 + 5^2\right)\cdot\frac{25}{216} + \left(3^2 + 4^2\right)\cdot\frac{27}{216} - \mu^2\right]$$

$\sigma = 8.75$

Aufgabe 3.4 **(4 BE)**
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse $X \le 4$ und $X \ge 3$ stochastisch unabhängig sind.

$$P(E_1) = P(X \le 4) = $$

$$P(X=-4) + P(X=-3) + P(X=-2) + P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$\ldots + P(X=4)$$

$$P(E_1) := \frac{1}{216} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{10}{216} + \frac{15}{216} + \frac{21}{216} + \frac{25}{216} + \frac{27}{216} + \frac{27}{216} = \frac{5}{8}$$

$$P(E_2) = P(X \ge 3) = $$

$$P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + (P(X=9) + P(X=10))$$

$$\ldots + P(X=11)$$

$$P(E_2) := \frac{27}{216} + \frac{27}{216} + \frac{25}{216} + \frac{21}{216} + \frac{15}{216} + \frac{10}{216} + \frac{6}{216} + \frac{3}{216} + \frac{1}{216} = \frac{5}{8}$$

$$P(E_1)\cdot P(E_2) = \frac{25}{64}$$

$$P\left[E_1(\cap)E_2\right] = P(3 \le X \le 4) = \frac{27}{216} + \frac{27}{216} = \frac{1}{4}$$

E_1 und E_2 sind stochastisch abhängig.