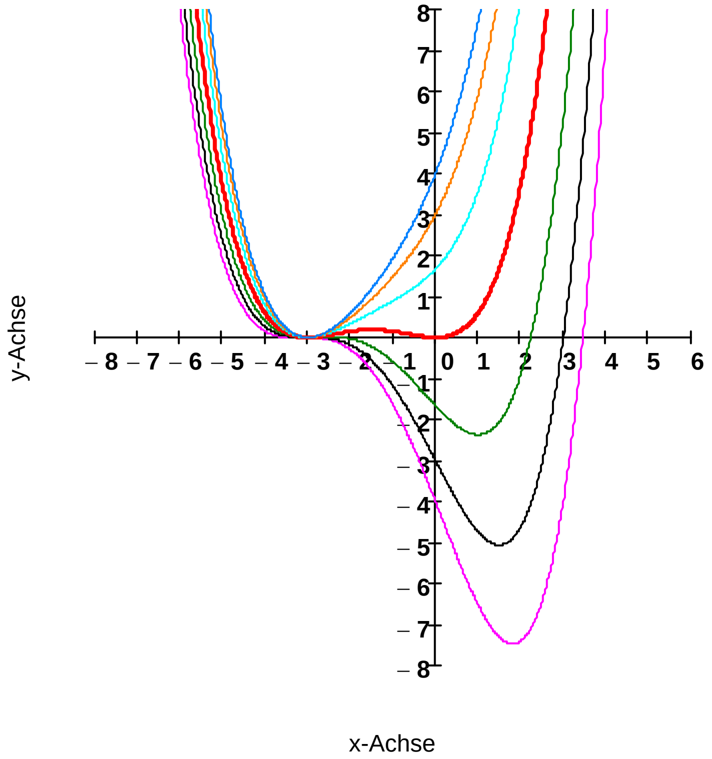
mathphys-online

GANZRATIONALE FUNKTIONEN



Inhaltsverzeichnis

Graphiken erstellt mit Mathcad 15

Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

1. Einführung

1.1 Das Pascalsche Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Die einzelnen Koeffizienten sind die Ergebnisse der sogenannten ***Binomialkoeffizienten*** $\binom{n}{k}$ (sprich *n über k*), wobei n die Zeile und k die Spalte angibt, wenn man die Zählung mit Null beginnt.

Mithilfe dieses Schemas können Binome höheren Grades berechnet werden.

Das wurde im ***Binomischen Satz*** formuliert:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n}$$

Binomische Formeln

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a + 1b\\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2\\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4
\end{aligned}
$$

1.2 Verschobene Potenzfunktionen

Aufgabe

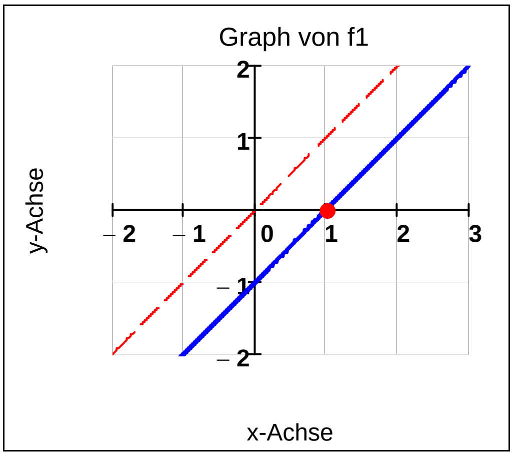
Gegeben sind folgende Funktionen $f_k(x) = (x-1)^k$ mit $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ und $x \in IR$ und ihre zugehörigen Graphen:

$f_1(x) = (x-1)$; $f_2(x) = (x-1)^2$; $f_3(x) = (x-1)^3$; $f_4(x) = (x-1)^4$;

a) Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen in der Umgebung der Nullstelle.

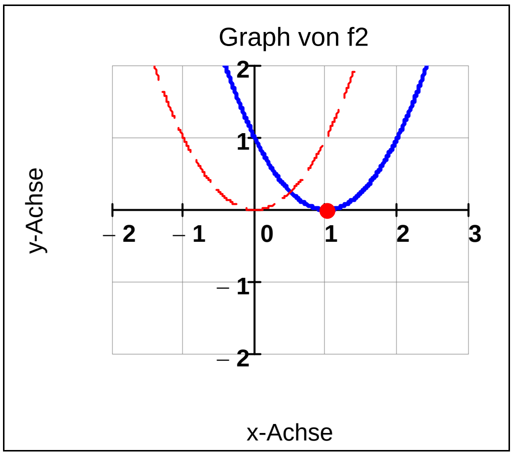
b) Multiplizieren Sie die Funktionsterme mithilfe des binomischen Satzes aus.

c) Vergleichen Sie den Verlauf in den Quadranten mit den bekannten Potenzfunktionen x^k und tragen Sie diese jeweils ein.



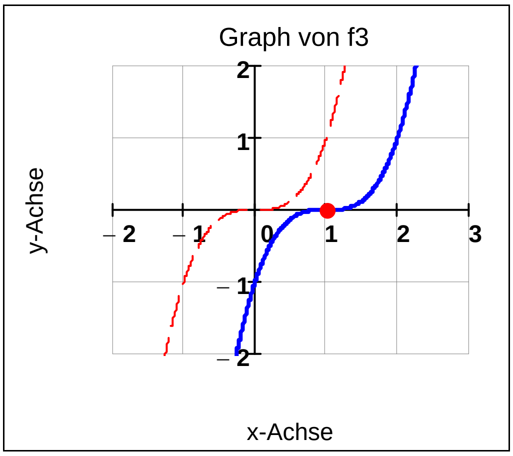
a) Der Graph von f_1 ***schneidet*** die x-Achse.

b) $f_1(x) = x - 1$



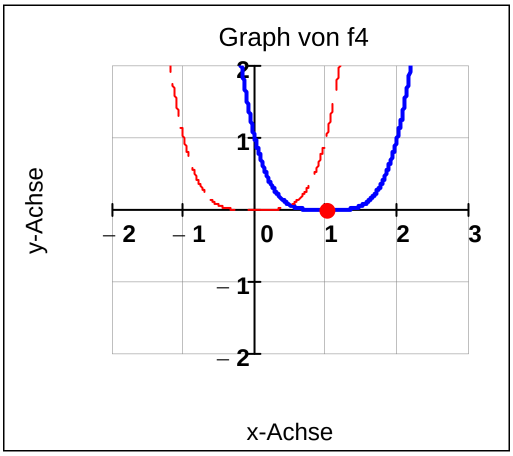
a) Der Graph von f_2 ***berührt*** die x-Achse.

b) $f_2(x) = x^2 - 2x + 1$



a) Der Graph von f_3 ***durchsetzt*** die x-Achse.

b) $f_3(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$



a) Der Graph von f_4 ***berührt*** die x-Achse.

b) $f_4(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

2. Verlauf der Graphen ganzrationaler Funktionen im Koordinatensystem

2.1 Definition des Funktionsterms

Bezeichnung

Ein Term der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ mit $k \in IN$, $a_k \in IR$, $a_n \neq 0$ und $x \in IR$ heißt ***Polynom n-ten Grades***.

Definition

Eine Funktion f, deren Funktionsterm man in die Form

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $k \in IN$, $a_k \in IR$, $a_n \neq 0$, $x \in IR$ bringen kann, heißt

ganzrationale Funktion n-ten Grades.

Spezialfälle

- $n = 0$: $f(x) = a_0 x^0 = a_0$ Parallele zur x-Achse oder x-Achse
- $n = 1$: $f(x) = a_0 + a_1 x$ Gerade
- $n = 2$: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ Parabel mit verschobenem Scheitel
- $n = 3$: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ Funktion 3.Grades
- $n = 4$: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ Funktion 4. Grades

  .
  .
  .
- $n \neq 0$: $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ Funktion n-ten Grades

2.2 Art der Funktion

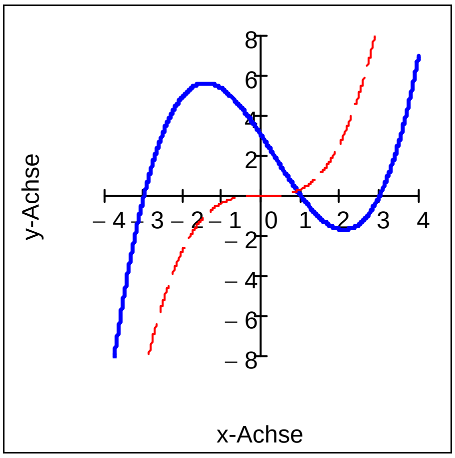
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ \wedge \ a_n \neq 0$$

Ansatz: Ausklammern der höchsten Potenz von x.

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \lim_{|x| \to \infty} \left[x^n \cdot \left(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{a_{n-2}}{x^2}}_{\downarrow\, 0} + \ldots + \underbrace{\frac{a_2}{x^{n-2}}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{a_1}{x^{n-1}}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{a_0}{x^n}}_{\downarrow\, 0} \right) \right] \to a_n \cdot x^n$$

Ergebnis Das Verhalten für $|x| \to \infty$ wird bestimmt durch die höchste Potenz von x bzw. durch den Term $a_n x^n$.

Beispiel 1



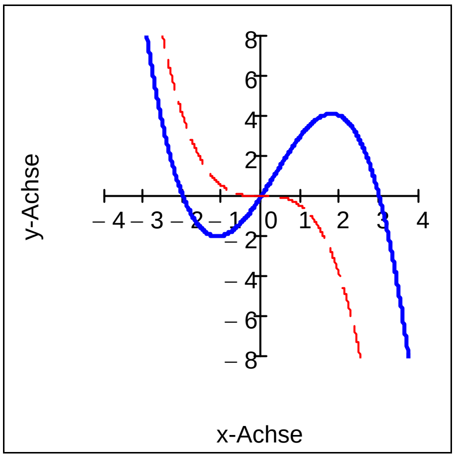
$$f_5(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(x^3 - x^2 - 9x + 9\right)$$

$$\lim_{|x| \to \infty} f_5(x) = \lim_{|x| \to \infty} \left[\frac{1}{3} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{9}{x^3}\right)\right]$$

Entspricht $\lim_{|x| \to \infty} \left[\frac{1}{3} x^3\right]$

Also gilt: $\lim_{x \to -\infty} f_5(x) \to -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f_5(x) \to +\infty$;

Beispiel 2



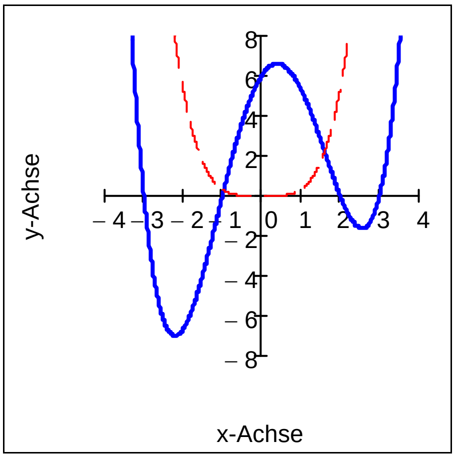
$$f_6(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(x^3 - x^2 - 6x\right)$$

$$\lim_{|x| \to \infty} f_6(x) = \lim_{|x| \to \infty} \left[-\frac{1}{2} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)\right]$$

Entspricht: $\lim_{|x| \to \infty} \left[-\frac{1}{2} x^3\right]$

Also gilt: $\lim_{x \to -\infty} f_6(x) \to +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f_6(x) \to -\infty$;

Beispiel 3



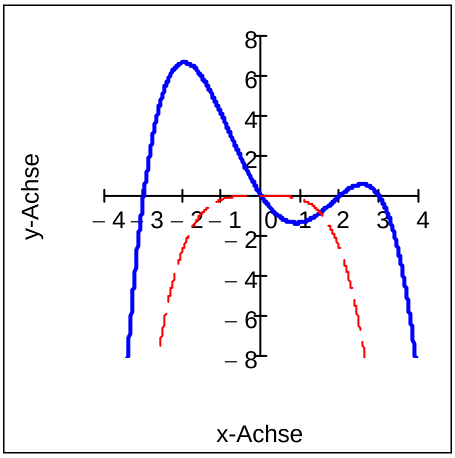
$$f_7(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18\right)$$

$$\lim_{|x| \to \infty} f_7(x) = \lim_{|x| \to \infty} \left[\frac{1}{3} x^4 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{11}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{18}{x^4}\right)\right]$$

Entspricht: $\lim_{|x| \to \infty} \left[\frac{1}{3} x^4\right]$

Also gilt: $\lim_{x \to -\infty} f_7(x) \to +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f_7(x) \to +\infty$;

Beispiel 4



$$f_8(x) = -\frac{1}{6} \cdot \left(x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x\right)$$

$$\lim_{|x| \to \infty} f_8(x) = \lim_{|x| \to \infty} \left[-\frac{1}{6} x^4 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{18}{x^3}\right)\right]$$

Entspricht: $\lim_{|x| \to \infty} \left[-\frac{1}{6} x^4\right]$

Also gilt: $\lim_{x \to -\infty} f_8(x) \to -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f_8(x) \to -\infty$

2.3 Symmetrie

Symmetriekriterium

G_f achsensymmetrisch zur y-Achse: $\Leftrightarrow$ **$f(-x) = f(x)$**

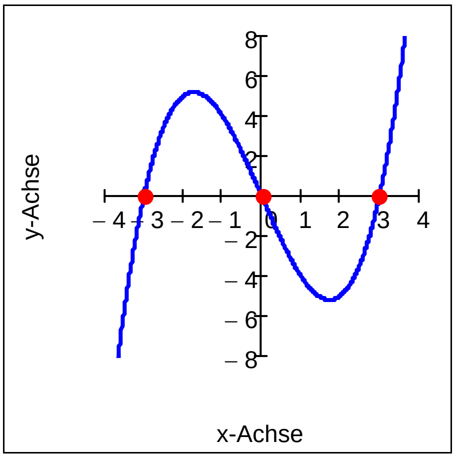
G_f punktsymmetrisch zum Ursprung: $\Leftrightarrow$ **$f(-x) = -f(x)$**

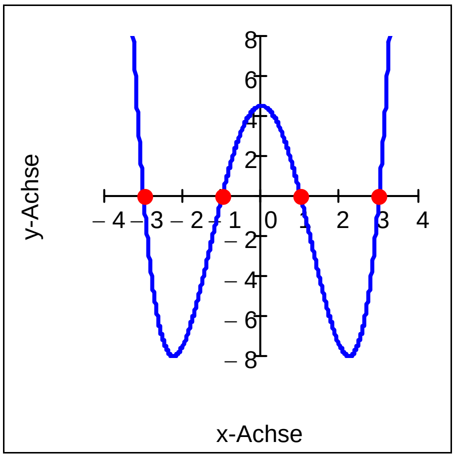
Beispiel

Gegeben sind die Graphen f_9 und f_{10} und die zugehörigen Funktionsterme.

a) Beweisen Sie die Symmetrie mithilfe des Kriteriums.

b) Formulieren Sie eine Eigenschaft des Funktionsterms bei ganzrationalen Funktionen.





Teilaufgabe a)

$$f_9(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{9}{2} x$$

$$\underline{\underline{f_9(-x)}} = \frac{1}{2}(-x)^3 - \frac{9}{2}(-x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x = -\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x\right) = \underline{\underline{-f_9(x)}}$$

Teilaufgabe a)

$$f_{10}(x) = \frac{1}{2} \cdot x^4 - 5x^2 + \frac{9}{2}$$

$$\underline{\underline{f_{10}(-x)}} = \frac{1}{2}(-x)^4 - 5(-x)^2 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}x^4 - 5x^2 + \frac{9}{2} = \underline{\underline{f_{10}(x)}}$$

Teilaufgabe b)

Der Funktionsterm enthält
nur ungerade Potenzen von x.

Bezeichnung:

Punktsymmetrische ganzrationale Funktionen heißen ungerade Funktionen.

Teilaufgabe b)

Der Funktionsterm enthält
nur gerade Potenzen von x.

Bezeichnung:

Achsensymmetrische ganzrationale Funktionen heißen gerade Funktionen.

2.4 Nullstellen

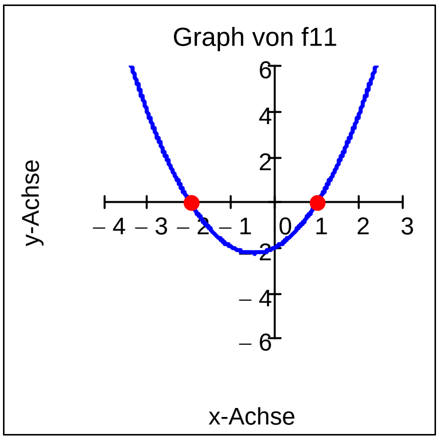
Satz: (Zerlegungssatz)

Jede ganzrationale Funktion n-ten Grades lässt sich folgendermaßen darstellen:
$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ ...\ (x - x_n)$ mit den Nullstellen x_i.
Sie hat **höchstens n verschiedene** Nullstellen.

Kommt eine dieser Nullstellen k-mal vor, so spricht man von einer **k-fachen Nullstelle**.

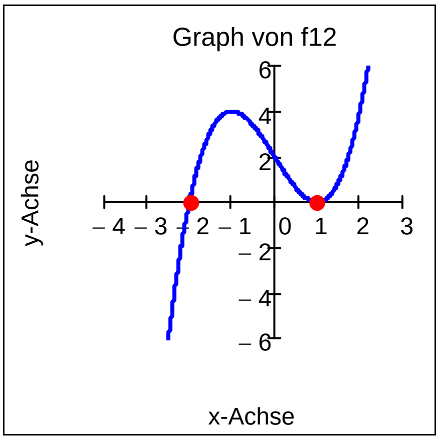
Art der Nullstelle

- Term $(x - x_i)$ $\Rightarrow$ **Einfache** Nullstelle: G_f **schneidet** die x–Achse.
- Term $(x - x_i)^2$ $\Rightarrow$ **Zweifache** Nullstelle: G_f **berührt** die x–Achse**.**
- Term $(x - x_i)^3$ $\Rightarrow$ **Dreifache** Nullstelle: G_f **durchsetzt** die x–Achse
- Term $(x - x_i)^4$ $\Rightarrow$ **Vierfache** Nullstelle: G_f **berührt** die x–Achse.



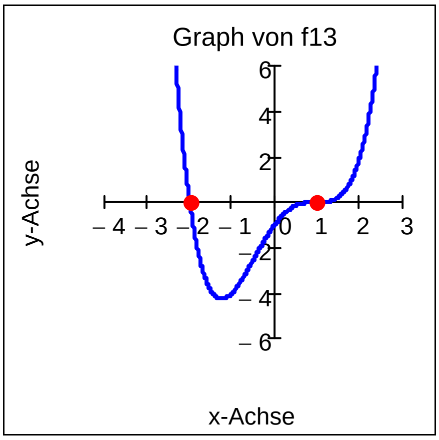
$f_{11}(x) = (x+2) \cdot (x-1)$

Nullstellen:
$x_1 = -2$ einfach; $x_2 = 1$ einfach;



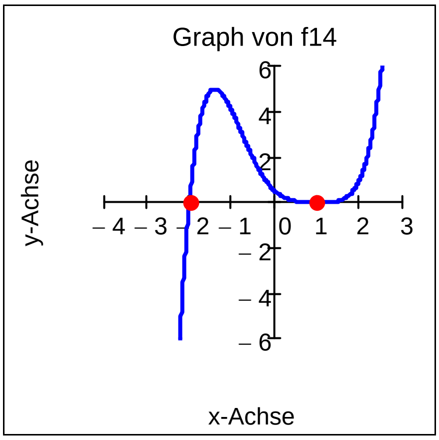
$f_{12}(x) = (x+2) \cdot (x-1)^2$

Nullstellen:
$x_1 = -2$ einfach, $x_2 = 1$ zweifach;



$f_{13}(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot (x-1)^3$

Nullstellen:
$x_1 = -2$ einfach; $x_2 = 1$ dreifach;



$f_{14}(x) = \frac{1}{4}(x+2) \cdot (x-1)^4$

Nullstellen:
$x_1 = -2$ einfach; $x_2 = 1$ vierfach;

3 Lösen von Gleichungen höheren Grades

Geg.:	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Ges.: NS, d.h.	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
Problem:	Lösung einer Gleichung höheren Grades
Hilfsmittel:	Ausklammern, Polynomdivision, Substitution, Näherungsverfahren

3.1 Ausklammern

Geg.: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x$

Bei Fehlen des konstanten Terms Ausklammern der höchstmöglichen Potenz von x.

Beispiel

$$x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0;\ x_2 = -1$$

$$x^3 + x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot (x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{12} = 0;\ x_3 = -1$$

$$x^4 + x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 \cdot (x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{123} = 0;\ x_4 = -1$$

3.2 Die Polynomdivision ohne Rest: Plausibilitätsbetrachtung:

Bekannt:

$$3864 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 4 \quad \hat{=} \quad 3 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4$$

$$12 = 1 \cdot 10 + 2 \quad \hat{=} \quad x + 2$$

Der Divisionsalgorithmus

$$\begin{array}{l}
\overset{\frown}{38}64 : 12 = 322 \\
-\ \underline{36} \\
\quad 26 \\
\quad -\ \underline{24} \\
\qquad 24 \\
\qquad -\ \underline{24} \\
\qquad\quad -
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 4) : (10 + 2) = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 2 \\
-\ \underline{(3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2)} \\
\qquad\qquad 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 \\
\qquad\quad -\ \underline{(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2 \cdot 10 + 4 \\
\qquad\qquad\qquad -\ \underline{(2 \cdot 10 + 4)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - \qquad -
\end{array}$$

Übertragung auf die Polynome:

$$\begin{array}{l}
(3 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4) : (x + 2) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2 \\
-\ \underline{(3 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2)} \\
\qquad\qquad 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x \\
\qquad\quad -\ \underline{(2 \cdot x^2 + 4 \cdot x)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2 \cdot x + 4 \\
\qquad\qquad\qquad -\ \underline{(2 \cdot x + 4)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - \qquad -
\end{array}$$

Merke:

Die Polynomdivision muss hier **immer** aufgehen.

<u>Satz: (Reduktionssatz)</u>

Geg. ist das **Polynom n-ten Grades** $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_n \neq 0$.

Ist x_1 eine Lösung der Gleichung $p(x) = 0$, so ist p(x) durch $(x - x_1)$ teilbar.

Es gilt: $p(x) : (x - x_1) = q(x)$, wobei $q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ ein **Polynom (n−1) – ten** Grades ist.

<u>Hinweis</u>

Die **Lösung x_1 wird durch Erraten** gefunden, wobei zu zeigen ist, dass $p(x_1) = 0$.
Um dieses Raten so effektiv und kurz wie möglich zu gestalten, folgender

<u>Satz</u>

Hat die **normierte** Gleichung $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ eine **ganzzahlige Lösung x_1, so ist x_1 ein Teiler von a_0.**

<u>MERKE</u>:
Die Polynomdivision wird solange durchgeführt, bis das Ergebnis der Polynomdivision ein **quadratischer** Term ist, dann Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

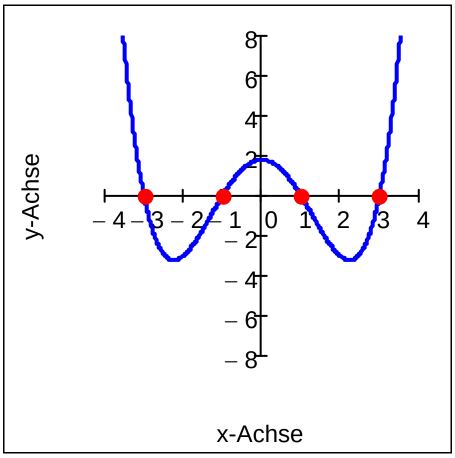
3.3 Biquadratische Gleichungen:

Lösung durch Substitution

Gerade Potenz von x als ***Biquadrat*** (Zweiquadrat) auffassen,

z. B. $x^4 = (x^2)^2$ bzw. $x^6 = (x^3)^2$

Beispiel 1: $f_{15}(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(x^4 - 10\,x^2 + 9 \right)$



Nullstellen:

$x^4 - 10\,x^2 + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 \right)^2 - 10\,x^2 + 9 = 0$

Substitution: $t = x^2$

$t^2 - 10\,t + 9 = 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1) \cdot (t-9) = 0$

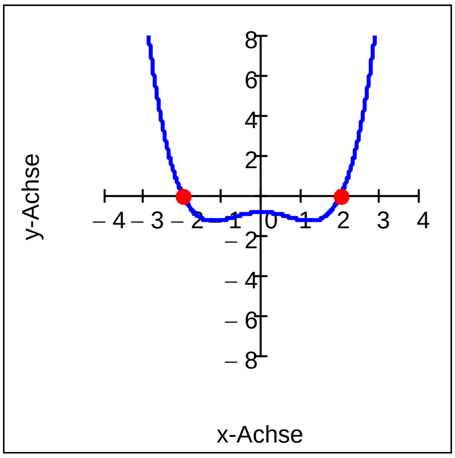
Lösungen: $t_1 = 1 \quad \vee \quad t_2 = 9$

Resubstitution:

$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1$

$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_{3/4} = \pm 3$

Beispiel 2: $f_{16}(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(x^4 - 3\,x^2 - 4 \right)$



Nullstellen:

$x^4 - 3\,x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 \right)^2 - 3\,x^2 - 4 = 0$

Substitution: $t = x^2$

$t^2 - 3\,t - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1) \cdot (t-4) = 0$

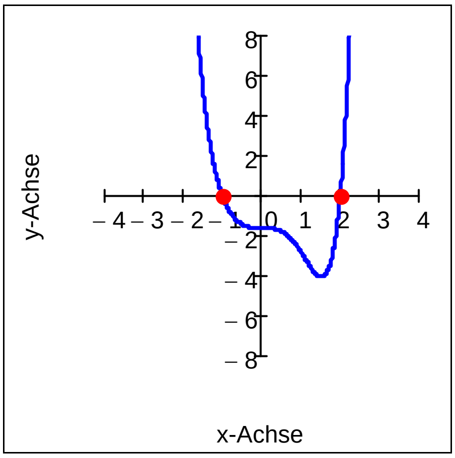
Lösungen: $t_1 = -1 \quad \vee \quad t_2 = 4$

Resubstitution:

$x^2 = -1$ nicht definiert

$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2$

Beispiel 3: $f_{17}(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(x^6 - 7\,x^3 - 8 \right)$



Nullstellen:

$x^6 - 7\,x^3 - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^3 \right)^2 - 7\,x^3 - 8 = 0$

Substitution: $t = x^3$

$t^2 - 7\,t - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1) \cdot (t-8) = 0$

Lösungen: $t_1 = -1 \quad \vee \quad t_2 = 8$

Resubstitution:

$x^3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$

$x^3 = 8 \Rightarrow x_2 = 2$

MERKE: Anwendung bei achsensymmetrischen Funktionen 4. Grades.
Ebenso bei Gleichungen vom Typ biquadratisch.

4. Bestimmung von Funktionstermen

Beim Aufstellen von Funktionsgleichungen aus gegebenen Punkten oder aus Bedingungen kommen lineare Gleichungssysteme vor.

Gesucht: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \wedge \quad a_n \neq 0$

Es gibt also $n+1$ Unbekannte $\{a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ ...\ ,\ a_{n-1}\ ,\ a_n\}$, d.h. es werden $n+1$ Bedingungen zur Bestimmung der Koeffizienten a_k benötigt.

Durch Einsetzen der Bedingungen bekommt man ein $(n+1 \times n+1)$ – **Gleichungssystem**, bestehend aus $n+1$ Gleichungen für $n+1$ Unbekannte a_k.

Beispiel 1

Berechnen Sie den Funktionsterm der **Geraden g** durch die Punkte $A(3/3)$ und $B(6/9)$.

Ansatz: $g(x) = a \cdot x + b$

Gleichung (1): $A \in G_g$: $3 \cdot a + b = 3$

Gleichung (2): $B \in G_g$: $6 \cdot a + b = 9$

$\boxed{(2 \times 2) - \text{GLS}}$

Lösung: $g(x) = 2x - 3$

Beispiel 2

Berechnen Sie den Funktionsterm der **Parabel p** durch die Punkte $A(-1/-12)$, $B(2/12)$ und $C(-3/-8)$.

Ansatz: $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Gleichung (1): $A \in G_p$: $a - b + c = -12$

Gleichung (2): $B \in G_p$: $4a + 2b + c = 12$

Gleichung (3): $C \in G_p$: $9a - 3b + c = -8$

$\boxed{(3 \times 3) - \text{GLS}}$

Lösung: $p(x) = 2x^2 + 6x - 8$

Beispiel 3

Berechnen Sie den Funktionsterm einer **Polynomfunktion 3. Grades** durch die Punkte $A(1/-1)$, $B(-1/-5)$, $C(2/4)$ und $D(-2/-28)$.

Ansatz: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Gleichung (1): $A \in G_f$: $a + b + c + d = -1$

Gleichung (2): $B \in G_f$: $-a + b - c + d = -5$

Gleichung (3): $C \in G_f$: $8a + 4b + 2c + d = 4$

Gleichung (4): $D \in G_f$: $-8a + 4b - 2c + d = -28$

$\boxed{(4 \times 4) - \text{GLS}}$

Lösung: $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

Eine systematische Lösung der Gleichungssysteme mittels Gauß-Algorithmus wird hier nicht behandelt.