Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2000
Mathematik 13 Technik - A I - Aufgabentext

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a mit $a \in \mathbb{R}$ und der in IR maximalen Definitionsmenge

D_{f_a} durch $f_a(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - a \cdot x + 4}$.

Teilaufgabe 1.1 (8 BE)
Bestimmen Sie D_{f_a} und die Art der Definitionslücken von f_a jeweils in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)
Ermitteln Sie die Nullstelle von f_a und die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a jeweils in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 1.3 (10 BE)
Bestimmen Sie für $a = 2$ die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f_2, und zeichnen Sie den Graphen von f_2 für $-4 \le x \le 6$.
x-Achse: $1 \cdot LE = 1 \cdot cm$; y-Achse: $1 \cdot LE = 4 \cdot cm$;

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Die Integralfunktion F ist definiert durch $F(x) = \displaystyle\int_0^x f_2(t)\, dt$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Lage und Art der Extremalstelle sowie die Lage der Wendestellen des Graphen von F. Geben Sie die Bedeutung von $F(2)$ für den Graphen von F und für den Graphen von f_2 an.

Teilaufgabe 2.0
Gegeben ist nun die Funktion g mit $g(x) = 4 \cdot \arctan\left(\dfrac{|x| - 4}{|x| + 4}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Geben Sie die Nullstellen von g an, und bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von g und das Verhalten von $g(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ sowie die Gleichung der Asymptote des Graphen von g.

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten und die Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von g. Untersuchen Sie das Verhalten von $g'(x)$ in der Umgebung des Extrempunktes.

[Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{16}{x^2 + 16}$ für $x > 0$]

Teilaufgabe 2.3 (10 BE)
Zeichnen Sie den Graphen von g für $-6 \le x \le 6$ in ein neues Koordinatensystem ($1 \cdot LE = 1 \cdot cm$), und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des endlichen Flächenstücks, das der Graph von g mit der x-Achse einschließt.

Teilaufgabe 3.0
Eine Metallkugel befindet sich in einer mit Öl gefüllten senkrechten Röhre. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Kugel aus der Ruhelage losgelassen und fällt in der Röhre nach unten. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der Kugel zum Zeitpunkt t mit $t \geq 0$ gilt folgende Differentialgleichung:

$$k \cdot v' + v = g \cdot b$$

Dabei bedeuten g die Maßzahl der Erdbeschleunigung und $k, b > 0$ Konstanten, die von der Größe und Dichte der Kugel und der Viskosität und Dichte des Öls abhängen.

Teilaufgabe 3.1 **(8 BE)**
Bestimmen Sie $v(t)$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

[Ergebnis: $v(t) = g \cdot b \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{k}}\right)$]

Teilaufgabe 3.2 **(2 BE)**
Ermitteln Sie das Verhalten von $v(t)$ für $t \rightarrow \infty$, und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.