

Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2000

Mathematik 13 Technik - A I - Lösung



Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a mit $a \in \mathbb{R}$ und der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge

$$D_{f_a} \text{ durch } f_a(x) = \frac{x-2}{x^2 - a \cdot x + 4}.$$

Teilaufgabe 1.1 (8 BE)

Bestimmen Sie D_{f_a} und die Art der Definitionslücken von f_a jeweils in Abhängigkeit von a .

$$f(x, a) := \frac{x-2}{x^2 - a \cdot x + 4}$$

Sonderfall: Nullstelle des Zählers in den Nenner einsetzen

$$4 - 2 \cdot a + 4 = 0 \text{ auflösen, } a \rightarrow 4$$

Nullstellen des Nenners:

$$x^2 - a \cdot x + 4 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } x \\ \text{erweitern} \end{array} \right. \rightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 16}}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 16}}{2} \end{array} \right)$$

Die Anzahl der Lösungen hängt ab von der Diskriminante: $D(a) := a^2 - 16$

$$D(a) > 0 \text{ auflösen, } a \rightarrow 4 < a \vee a < -4$$

$$D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 16}}{2}; \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 16}}{2} \right\} \quad \text{Polstellen mit Vorzeichenwechsel.}$$

$$D(a) = 0 \text{ auflösen, } a \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{Sonderfall vgl. oben}$$

$$a = -4 \quad D_{f_{-4}} = \mathbb{R} \setminus \{ -2 \} \quad f(x, -4) = \frac{x-2}{(x+2)^2}$$

$x = -2$ Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

$$a = 4 \quad D_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{ 2 \} \quad f(x, 4) = \frac{1}{x-2}$$

$x = 2$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

$$D(a) < 0 \text{ auflösen, } a \rightarrow -4 < a < 4$$

$$D_{f_a} = \mathbb{R}$$

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Ermitteln Sie die Nullstelle von f_a und die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a jeweils in Abhängigkeit von a .

Nullstelle $x_0 := 2$, falls $a \neq 4$.

keine Nullstelle, falls $a = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2 - a \cdot x + 4} \rightarrow 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2 - a \cdot x + 4} \rightarrow 0 \quad (\text{Zählergrad} > \text{Nennergrad})$$

waagrechte Asymptote A_1 : $y = 0$ unabhängig von a

Für $a < -4 \vee a > 4$: zwei senkrechte Asymptoten

$$x = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 16}}{2} \quad x = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 16}}{2}$$

Für $a = -4 \vee a = 4$: eine senkrechte Asymptote: $x = \frac{a}{2}$

Für $-4 < a < 4$: keine senkrechte Asymptote

Teilaufgabe 1.3 (10 BE)

Bestimmen Sie für $a = 2$ die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f_2 , und zeichnen Sie den Graphen von f_2 für $-4 \leq x \leq 6$.

x-Achse: 1·LE = 1·cm; y-Achse: 1·LE = 4·cm;

$$f(x) := \frac{x-2}{x^2 - 2 \cdot x + 4} \quad D = \mathbb{R}$$

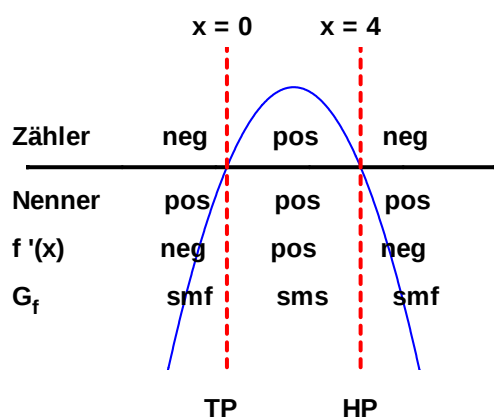
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 4) - (x-2) \cdot (2 \cdot x - 2)}{(x^2 - 2 \cdot x + 4)^2} = \frac{4 \cdot x - x^2}{(x^2 - 2 \cdot x + 4)^2} = \frac{x \cdot (4 - x)}{(x^2 - 2 \cdot x + 4)^2}$$

waagrechte Tangenten: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (4 - x)$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 4$$



$$z(x) := 4 \cdot x - x^2$$



G_f ist streng mon. fallend in $x \in]-\infty ; 0]$,

G_f ist streng mon. steigend in $x \in [0 ; 2]$,

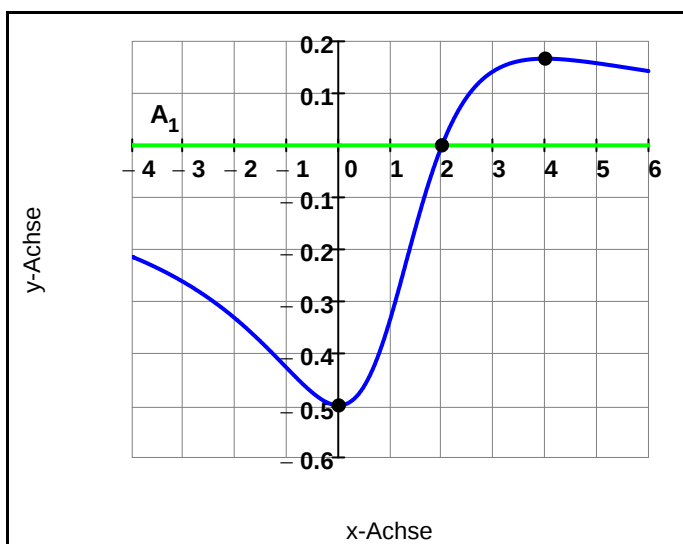
G_f ist streng mon. fallend in $x \in] 2 ; \infty [$.

Tiefpunkt:

$$f(0) = -\frac{1}{2} = -0.5 \quad T(0, -0.5)$$

Hochpunkt:

$$f(4) \rightarrow \frac{1}{6} = 0.17 \quad H(4, 0.17)$$



Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Die Integralfunktion F ist definiert durch $F(x) = \int_0^x f_2(t) dt$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Lage und Art der Extremalstelle sowie die Lage der Wendestellen des Graphen von F . Geben Sie die Bedeutung von $F(2)$ für den Graphen von F und für den Graphen von f_2 an.

$$F'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E = 2$$

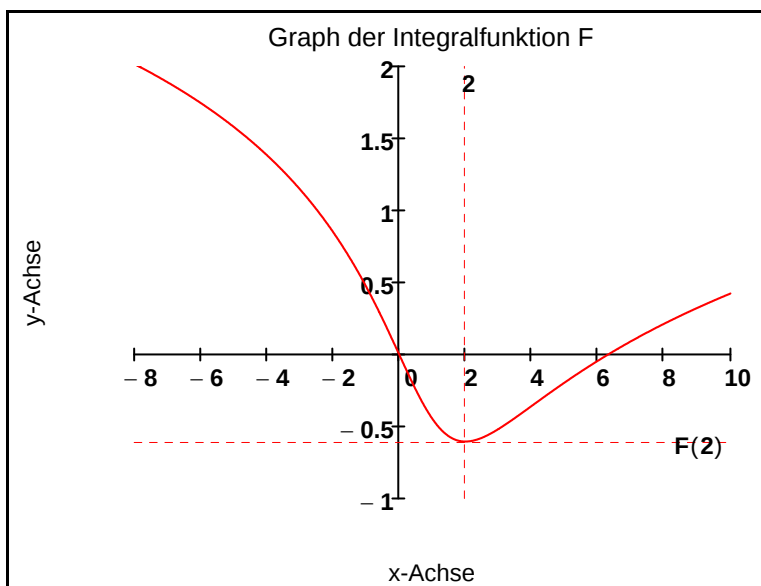
G_F ist streng monoton fallend in $x \in]-\infty; 2]$ und streng monoton steigend in $x \in [2; \infty[$

G_f besitzt bei $x_E = 2$ einen Tiefpunkt.

$$F''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Wendestellen: } x_{W1} = 0 \quad x_{W2} = 4$$

$F(2)$ ist die y-Koordinate des Tiefpunktes von F .

$|F(2)|$ ist die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche, die der Graph von f_2 mit den Koordinatenachsen einschließt.



Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist nun die Funktion g mit $g(x) := 4 \cdot \arctan\left(\frac{|x| - 4}{|x| + 4}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Geben Sie die Nullstellen von g an, und bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von g und das Verhalten von $g(x)$ für $x \rightarrow \pm \infty$ sowie die Gleichung der Asymptote des Graphen von g .

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x| - 4}{|x| + 4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 4$$

$$\text{Nullstellen:} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 := -4 \quad x_2 := 4$$

$$g(-x) = 4 \cdot \arctan\left(\frac{|-x| - 4}{|-x| + 4}\right) = 4 \cdot \arctan\left(\frac{|x| - 4}{|x| + 4}\right) = g(x)$$

$\Rightarrow$ G_g ist symmetrisch zur y-Achse.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|x| - 4}{|x| + 4} \right) \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 \cdot \arctan\left(\frac{|x| - 4}{|x| + 4}\right) \right) \rightarrow \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{|x| - 4}{|x| + 4} \right) \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 \cdot \arctan\left(\frac{|x| - 4}{|x| + 4}\right) \right) \rightarrow \pi$$

waagrechte Asymptote: $y = \pi$

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)

Ermitteln Sie das Monotonieverhalten und die Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von g . Untersuchen Sie das Verhalten von $g'(x)$ in der Umgebung des Extrempunktes.

$$[\text{Teilergebnis: } g'(x) = \frac{16}{x^2 + 16} \text{ für } x > 0]$$

$$\text{Für } x > 0 \text{ gilt: } g_1(x) := 4 \cdot \arctan\left(\frac{x - 4}{x + 4}\right)$$

$$g_1'(x) = \frac{4}{1 + \left(\frac{x - 4}{x + 4}\right)^2} \cdot \frac{(x + 4) - (x - 4)}{(x + 4)^2} = \frac{4 \cdot (x + 4)^2}{(x + 4)^2 + (x - 4)^2} \cdot \frac{8}{(x + 4)^2}$$

$$= \frac{32}{x^2 + 8 \cdot x + 16 + x^2 - 8 \cdot x + 16} = \frac{32}{2 \cdot x^2 + 32} = \frac{16}{x^2 + 16} \quad \text{positiv}$$

Für $x < 0$ gilt: $g_2(x) := 4 \cdot \arctan\left(\frac{-x-4}{-x+4}\right)$

$g_2'(x) = \frac{-16}{x^2 + 16}$ Punktsymmetrie des Graphen der Ableitungsfunktion.

G_g ist streng monoton fallend in $x \in]-\infty; 0]$ und streng monoton steigend in $x \in]0; \infty[$

$g(0) \rightarrow -\pi$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt auf der Nahtstelle: $T(0, -\pi)$

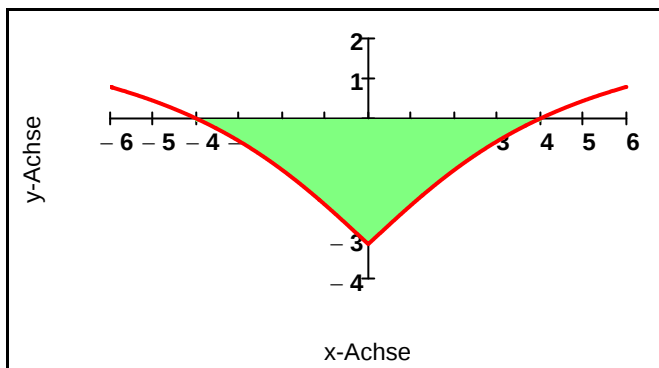
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-16}{x^2 + 16} \rightarrow -1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{16}{x^2 + 16} \rightarrow 1$

Teilaufgabe 2.3 (10 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von g für $-6 \leq x \leq 6$ in ein neues Koordinatensystem ($1 \cdot \text{LE} = 1 \cdot \text{cm}$), und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des endlichen Flächenstücks, das der Graph von g mit der x -Achse einschließt.



$g_1(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+4} = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0 \Leftrightarrow x_1 := 4$



$A = -\left(2 \cdot \int_0^4 g(x) dx\right) = -\left(2 \cdot \int_0^4 4 \cdot \arctan\left(\frac{x-4}{x+4}\right) dx\right)$

Bestimmung der Stammfunktion G:

$$G(x) = \int 4 \cdot \arctan\left(\frac{x-4}{x+4}\right) dx$$

$$u(x) := 4 \cdot \arctan\left(\frac{x-4}{x+4}\right) \quad u'(x) := \frac{16}{x^2 + 16}$$

$$v'(x) := 1 \quad v(x) := x$$

$$G(x) = 4 \cdot x \cdot \arctan\left(\frac{x-4}{x+4}\right) - 8 \cdot \int \frac{2 \cdot x}{x^2 + 16} dx = 4 \cdot x \cdot \arctan\left(\frac{x-4}{x+4}\right) - 8 \cdot \ln(x^2 + 16)$$

$$A = -(G(4) - G(0)) = -(4 \cdot 4 \cdot \arctan(0) - 8 \cdot \ln(32) + 8 \cdot \ln(16)) = \ln(256)$$



Teilaufgabe 3.0

Eine Metallkugel befindet sich in einer mit Öl gefüllten senkrechten Röhre. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Kugel aus der Ruhelage losgelassen und fällt in der Röhre nach unten. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der Kugel zum Zeitpunkt t mit $t \geq 0$ gilt folgende Differentialgleichung:

$$k \cdot v' + v = g \cdot b$$

Dabei bedeuten g die Maßzahl der Erdbeschleunigung und $k, b > 0$ Konstanten, die von der Größe und Dichte der Kugel und der Viskosität und Dichte des Öls abhängen.

Teilaufgabe 3.1 (8 BE)

Bestimmen Sie $v(t)$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

[Ergebnis: $v(t) = g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)$]

Gegeben ist die DGL: $k \cdot v' + v = g \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad v' + \frac{v}{k} = \frac{g \cdot b}{k}$

Homogene DGL: $v' + \frac{v}{k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v' = -\frac{v}{k}$

Triviale Lösung: $v = 0$

Differentialquotient: $\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{k}$

Trennen der Variablen: $\frac{dv}{v} = \frac{-1}{k} \cdot dt$ mit $v \neq 0$

Integration: $\int \frac{1}{v} dv = \int \frac{-1}{k} dt + C \rightarrow \ln(v) = C - \frac{t}{k}$

Auflösen nach v: $\ln(v) = C - \frac{t}{k} \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, v} \\ \text{erweitern} \end{array} \right. \rightarrow e^C \cdot e^{-\frac{t}{k}} \quad \text{mit } e^C = D$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $v_H(t) = D \cdot e^{-\frac{t}{k}}$

Variation der Konstanten: $v_S(t) = D(t) \cdot e^{-\frac{t}{k}}$

Ableitung: $v'_S(t) = D'(t) \cdot e^{-\frac{t}{k}} + D(t) \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) \cdot e^{-\frac{t}{k}}$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $v' + \frac{v}{k} = \frac{g \cdot b}{k}$

$$D'(t) \cdot e^{-\frac{t}{k}} + D(t) \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) \cdot e^{-\frac{t}{k}} + \frac{1}{k} \cdot \left(D(t) \cdot e^{-\frac{t}{k}}\right) = \frac{g \cdot b}{k}$$

Vereinfachen: $D'(t) \cdot e^{-\frac{t}{k}} = \frac{g \cdot b}{k} \quad \Leftrightarrow \quad D'(t) = \frac{g \cdot b}{k} \cdot e^{\frac{t}{k}}$

Integration: $D(t) = \int \frac{g \cdot b}{k} \cdot e^{\frac{t}{k}} dt = \frac{g \cdot b}{k} \cdot k \cdot e^{\frac{t}{k}} = g \cdot b \cdot e^{\frac{t}{k}}$

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL: $v_S(t) = g \cdot b \cdot e^{\frac{t}{k}} \cdot e^{-\frac{t}{k}} = g \cdot b$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL: $v_A(t) = D \cdot e^{-\frac{t}{k}} + g \cdot b$

Anfangsbedingung einsetzen:

$$v_A(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow D \cdot e^0 + g \cdot b = 0 \text{ auflösen, } D \rightarrow -b \cdot g$$

Partikuläre Lösung: $v_P(t) = -b \cdot g \cdot e^{-\frac{t}{k}} + g \cdot b$

$$v_P(t) = g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)$$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Ermitteln Sie das Verhalten von $v(t)$ für $t \rightarrow \infty$, und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right) \right] = g \cdot b$$

Die Geschwindigkeit der Kugel wird nicht beliebig größer, sie strebt gegen den Wert $g \cdot b$

Angenommene Werte für die graphische Darstellung: $g := 10$ $b := \frac{9}{10}$ $k := 1$

$$v_P(t) := g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)$$

