Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2007

- **Mathematik 13 Technik - A II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = \dfrac{4}{1 + a \cdot e^{-2 \cdot x}}$ mit $a \in$ IR und der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subset$ IR.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Bestimmen Sie D_{f_a} in Abhängigkeit von a.

$$1 + a \cdot e^{-2 \cdot x} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow -\frac{\ln\left(-\frac{1}{a}\right)}{2}$$

Bemerkung:

$$-\frac{\ln\left(-\frac{1}{a}\right)}{2} = \ln\left[\left(\frac{-1}{a}\right)^{\frac{-1}{2}}\right] = \ln\left[(-a)^{-1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)}\right] = \ln\left(\sqrt{-a}\right)$$

$a < 0$ $\qquad D_{f_a} = \text{IR} \setminus \left\{ -\frac{\ln\left(-\frac{1}{a}\right)}{2} \right\}$ $\qquad a \geq 0$ $\qquad D_{f_a} = \text{IR}$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Zeigen Sie, dass jede Funktion f_a eine Lösung der Differentialgleichung $y' = 2 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot y^2$ ist, und bestimmen Sie eine Lösung dieser Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $y(0) = 0.4$ erfüllt.

$$f(x,a) := \frac{4}{1 + a \cdot e^{-2 \cdot x}}$$

Linke Seite der DGL:

$$f'(x,a) := \frac{d}{dx} f(x,a) = \frac{8 \cdot a \cdot e^{-2 \cdot x}}{\left(a \cdot e^{-2 \cdot x} + 1\right)^2}$$

Rechte Seite der DGL:

$$2 \cdot f(x,a) - \frac{1}{2} \cdot (f(x,a))^2 = \frac{8}{a \cdot e^{-2 \cdot x} + 1} - \frac{8}{\left(a \cdot e^{-2 \cdot x} + 1\right)^2} = \frac{8 \cdot a \cdot e^{-2 \cdot x}}{\left(a \cdot e^{-2 \cdot x} + 1\right)^2}$$

$$f(0,a) = \frac{4}{10} \rightarrow \frac{4}{a + 1} = \frac{2}{5} \text{ auflösen}, a \rightarrow 9$$

Teilaufgabe 1.3 (2 BE)
Untersuchen Sie für $a > 0$ das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern von D_{f_a}.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4}{1 + a \cdot e^{-2 \cdot x}} \rightarrow 4$$

$$\downarrow$$
$$0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{1 + a \cdot e^{-2 \cdot x}} \text{ annehmen}, a > 0 \rightarrow 0$$

$$\downarrow$$
$$\infty$$

Teilaufgabe 2.0
f sei die Funktion f_9 aus Aufgabe 1.

Es gilt also $f(x) := \dfrac{4}{1 + 9 \cdot e^{-2 \cdot x}}$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Für die 2. Ableitung f'' der Funktion f gilt: $f''(x) := \dfrac{144 \cdot e^{-2 \cdot x} \cdot \left(9 \cdot e^{-2 \cdot x} - 1\right)}{\left(1 + 9 \cdot e^{-2 \cdot x}\right)^3}$ und $D_{f''} = \mathrm{IR}$.

(Nachweis nicht erforderlich!)
Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls dessen Koordinaten.

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9 \cdot e^{-2 \cdot x} - 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \ln(3)$$

Vorzeichen: $\left(9 \cdot e^{-2 \cdot x} - 1\right) > 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow x < \dfrac{\ln(9)}{2}$

$x = \ln(3)$

Zähler	pos	neg
Nenner	pos	pos
f''(x)	pos	neg
G_f	lk	rk

WP

$x_W := \ln(3)$ Nullstelle mit VZW, also Wendestelle

$f(x_W) = 2$

Wendepunkt: **WP(ln(3) / 2)**

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Begründen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist, und bestimmen Sie den Funktionsterm und die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} von f.
(Teilergebnis: $f^{-1}(x) = 0.5 \cdot \ln\left(\frac{9 \cdot x}{4 - x}\right)$

$$f(x) = \frac{4}{9 \cdot e^{-2 \cdot x} + 1} \qquad f'(x) = \frac{-4}{\left(9 \cdot e^{-2 \cdot x} + 1\right)^2} \cdot 9 \cdot e^{-2 \cdot x} \cdot (-2) = \frac{72 \cdot e^{-2 \cdot x}}{\left(9 \cdot e^{-2 \cdot x} + 1\right)^2}$$

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = \frac{72 \cdot e^{-2 \cdot x}}{\left(9 \cdot e^{-2 \cdot x} + 1\right)^2}$$

$f'(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ G_f streng monoton steigend, also umkehrbar.

Vertauschung der Variablen und nach y auflösen.

$$x = \frac{4}{9 \cdot e^{-2 \cdot y} + 1} \text{ auflösen}, y \rightarrow -\frac{\ln\left(-\frac{x - 4}{9 \cdot x}\right)}{2}$$

Umformung:

$$y = f^{-1}(x) = -\frac{\ln\left(-\frac{x - 4}{9 \cdot x}\right)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{-(9 \cdot x)}{x - 4}\right] = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{9 \cdot x}{4 - x}\right)$$

Funktionsterm Umkehrfunktion: $u(x) := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{9 \cdot x}{4 - x}\right)$

Definitionsmenge:

$$\frac{9 \cdot x}{4 - x} > 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 0 < x < 4 \qquad D_u =]\,0\,;\,4\,[$$

Teilaufgabe 2.3 **(4 BE)**

Zeigen Sie, dass der Graph von f^{-1} symmetrisch zum Punkt **S(2/ ln(3))** ist.

Transformationsgleichungen:

$$x = u + 2 \qquad y = v + \ln(3)$$

Koordinatentransformation:

$$v + \ln(3) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left[\frac{9\cdot(u+2)}{4-(u+2)}\right]$$

$$v = \frac{1}{2}\cdot\ln\left[\frac{9\cdot(u+2)}{4-(u+2)}\right] - \ln(3) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left[\frac{9\cdot(u+2)}{4-(u+2)}\right] - \frac{1}{2}\ln(9) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left[\frac{9\cdot(u+2)}{9\cdot(2-u)}\right] = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{u+2}{2-u}\right)$$

$$f\_(u) := \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{u+2}{2-u}\right)$$

Symmetriebeweis:

$$f\_(-u) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{-u+2}{2+u}\right) = \frac{-1}{2}\cdot\ln\left(\frac{2+u}{2-u}\right) = -f\_(u)$$

Teilaufgabe 2.4 **(3 BE)**

Berechen Sie die Steigung des Graphen von f^{-1} an der Stelle $x_0 = 2$, ohne den Funktionsterm der Ableitungsfunktion von f^{-1} explizit zu berechnen.

$$f(x) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{9\cdot e^{-2\cdot x}+1} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad 2 = 9\cdot e^{-2\cdot x} + 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2\cdot x} = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow\quad -2\cdot x = \ln\left(\frac{1}{9}\right) \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{-1}{2}\cdot(\ln(1) - \ln(9)) = \ln(3)$$

also: $f(\ln(3)) = 2$ bzw. $u(2) = \ln(3)$ das wäre bekannt aus 2.3, nämlich das Symmetriezentrum

$$f'(x) = \frac{72\cdot e^{-2\cdot x}}{\left(9\cdot e^{-2\cdot x}+1\right)^2} \qquad m_u := \frac{1}{f'(\ln(3))} \qquad m_u = 0.5$$

Nebenrechnung:

$$f'(\ln(3)) = \frac{72\cdot e^{-2\cdot\ln(3)}}{\left(9\cdot e^{-2\cdot\ln(3)}+1\right)^2} = \frac{72\cdot e^{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}}{\left(9\cdot e^{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}+1\right)^2} = \frac{72\cdot\frac{1}{9}}{\left(9\cdot\frac{1}{9}+1\right)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

Teilaufgabe 2.5 (3 BE)

Gegeben ist die Funktion F mit $\mathbf{F(x) = \int_0^x f(t)\,dt}$ mit der Definitionsmenge $\mathbf{D_F = IR}$.

Teilaufgabe 2.5.1 (4 BE)
Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von F und das Krümmungsverhalten des Graphen von f an. Begründen Sie Ihre Angaben.

$\mathbf{F(0) = 0}$ $\qquad$ $\mathbf{x_0 = 0}$ ist eine Nullstelle.

$\mathbf{F'(x) = f(x)}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{4}{9\cdot e^{-2\cdot x} + 1}$ $\qquad$ ist positiv für $x \in IR$

G_F ist streng monoton steigend, also ist $\mathbf{x_0}$ die einzige Nullstelle.

$\mathbf{F''(x) = f'(x)}$ $\qquad$ $f'(x) = \dfrac{72\cdot e^{-2\cdot x}}{\left(9\cdot e^{-2\cdot x} + 1\right)^2}$ $\qquad$ ist positiv für $x \in IR$

G_F ist linksgekrümmt.

Teilaufgabe 2.5.2 (8 BE)
Bestimmen Sie eine Darstellung des Funktionsterms $\mathbf{F(x)}$ der Integralfunktion F ohne Integral-zeichen.

[Hinweis: Beginnen Sie mit einer geeigneten Substitution, z. B. $\mathbf{z = 9\cdot e^{-2\cdot t}}$ oder $\mathbf{z = 9\cdot e^{-2\cdot x}}$.]

$$\mathbf{F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{4}{9\cdot e^{-2\cdot t} + 1}\,dt}$$

Nebenrechnung für: $\qquad \displaystyle\int \frac{4}{9\cdot e^{-2\cdot x} + 1}\,dx$

Substitution: $\qquad \mathbf{z = 9\cdot e^{-2\cdot x}} \qquad \dfrac{dz}{dx} = -18\cdot e^{-2\cdot x} \qquad dx = \dfrac{dz}{\left(-18\cdot e^{-2\cdot x}\right)}$

einsetzen: $\qquad \displaystyle\int \frac{4}{z+1}\cdot\frac{1}{(-2\cdot z)}\,dz = \int \frac{-2}{(z+1)\cdot z}\,dz$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-2}{(z+1)\cdot z} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z} = \frac{A\cdot z + B\cdot(z+1)}{(z+1)\cdot z} = \frac{(A+B)\cdot z + B}{(z+1)\cdot z}$$

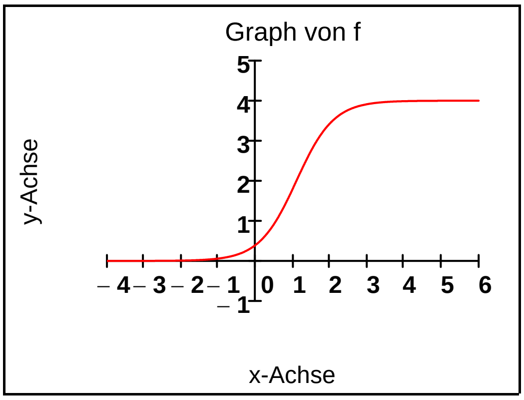
Koeffizientenvergleich: $\quad A + B = 0 \qquad B = -2 \qquad \Rightarrow \qquad A = 2$

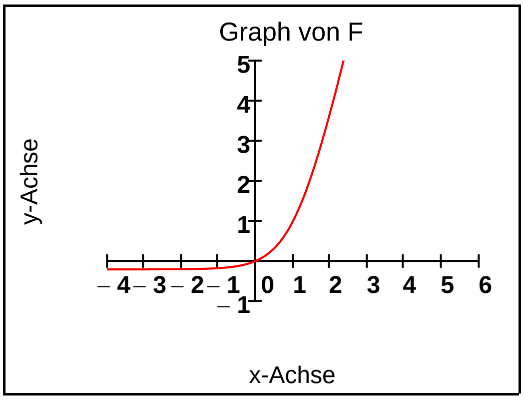
$$\int \frac{-2}{(z+1)\cdot z}\,dz = \int \frac{2}{z+1} - \frac{2}{z}\,dz = 2\cdot\ln\left(\frac{z+1}{z}\right) = 2\cdot\ln\left(\frac{9\cdot e^{-2\cdot x}+1}{9\cdot e^{-2\cdot x}}\right)$$

$$\int_0^x \frac{4}{9\cdot e^{-2\cdot t}+1}\,dt = 2\cdot\ln\left(\frac{9\cdot e^{-2\cdot x}+1}{9\cdot e^{-2\cdot x}}\right) - 2\cdot\ln\left(\frac{9\cdot e^{0}+1}{9\cdot e^{0}}\right) = 2\cdot\ln\left(\frac{9\cdot e^{-2\cdot x}+1}{9\cdot e^{-2\cdot x}}\right) - 2\cdot\ln\left(\frac{10}{9}\right)$$

Lösung ist äquivalent mit:

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt \rightarrow 2\cdot\ln\left(e^{2\cdot x}+9\right) - 2\cdot\ln(10)$$





Teilaufgabe 3 (10 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + 2\cdot y = \cos(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Inhomogene DGL: $\quad y' + 2\cdot y = \cos(x)$

Homogene DGL: $\quad y' + 2\cdot y = 0$

Triviale Lösung: $\quad y = 0$

Differentialquotient: $\quad \dfrac{dy}{dx} = -2\cdot y$

Trennen der Variablen: $\quad \dfrac{dy}{y} = -2\cdot dx \qquad$ mit $y \neq 0$

Integration: $\quad \displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int -2\,dx + k \rightarrow \ln(|y|) = k - 2\cdot x$

Delogarithmieren: $|y| = e^{-2\cdot x+k} = e^{-2\cdot x}\cdot e^{k}$

1. Fall: $y = e^{-2\cdot x}\cdot K_1$ mit $K_1 = e^{k} > 0$

2. Fall: $y = e^{-2\cdot x}\cdot K_2$ mit $K_2 = -e^{k} < 0$

mit trivialer Lösung: $y_h(x) = K\cdot e^{-2\cdot x}$ mit $K \in IR$

Variation der Konstanten: $y_p(x) = K(x)\cdot e^{-2\cdot x}$

Ableitungsfunktion: $y'_p(x) = K'(x)\cdot e^{-2\cdot x} + K(x)\cdot e^{-2\cdot x}\cdot(-2)$ $y' + 2\cdot y = \cos(x)$

Einsetzen in DGL: $K'(x)\cdot e^{-2\cdot x} + K(x)\cdot e^{-2\cdot x}\cdot(-2) + 2\cdot K(x)\cdot e^{-2\cdot x} = \cos(x)$

Vereinfachen: $K'(x) = \cos(x)\cdot e^{2\cdot x}$

$$K(x) = \int \cos(x)\cdot e^{2\cdot x}\,dx$$

$u(x) = \cos(x)$ $u'(x) = -\sin(x)$

$v(x) = e^{2\cdot x}$ $v'(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}$

$$\int \cos(x)\cdot e^{2\cdot x}\,dx = \cos(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} + \int \sin(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}\,dx$$

$u(x) = \sin(x)$ $u'(x) = \cos(x)$

$v(x) = e^{2\cdot x}$ $v'(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}$

$$\int \cos(x)\cdot e^{2\cdot x}\,dx = \cos(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} + \sin(x)\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{2\cdot x} - \int \frac{1}{4}\cdot e^{2\cdot x}\cdot\cos(x)\,dx$$

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\int \cos(x)\cdot e^{2\cdot x}\,dx = \cos(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} + \sin(x)\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{2\cdot x}$$

$$\int \cos(x)\cdot e^{2\cdot x}\,dx = \frac{4}{5}\cdot\left(\cos(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} + \sin(x)\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{2\cdot x}\right) = \frac{e^{2\cdot x}}{5}\cdot(2\cdot\cos(x) + \sin(x))$$

$$K(x) = \frac{e^{2\cdot x}}{5}\cdot(2\cdot\cos(x) + \sin(x))$$

Spezielle Lösung: $y_p(x) = \frac{e^{2\cdot x}}{5}\cdot(2\cdot\cos(x) + \sin(x))\cdot e^{-2\cdot x} = \frac{1}{5}\cdot(2\cdot\cos(x) + \sin(x))$

Allgemeine Lösung: $y_A(x) = K\cdot e^{-2\cdot x} + \frac{1}{5}\cdot(2\cdot\cos(x) + \sin(x))$

Teilaufgabe 4 (6 BE)
Bei Untersuchungen darüber, wie oft Publikationen zitiert werden, verwendet man zur näherungsweisen Bestimmung den Funktionsterm z(t), der die monatliche Anzahl der Zitate in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten) angibt, und den Funktionsterm $z'(t)$, der die momentane Veränderungsrate angibt.Dabei stellt man fest, dass gilt: $z'(t) = \lambda\cdot z(t)$.

Von einer Publikation wird nun über einen größeren Zeitraum die Anzahl der Zitate pro Monat erfasst. Dabei ergibt sich: $z(6) = 950$ und $z(10) = 900$.

Bestimmen Sie z(t), wenn für z(t) obige Differentialgleichung gilt.

Gegebene DGL: $z' = \lambda\cdot z$

Differentialquotient: $\frac{dz}{dt} = \lambda\cdot z$

Trennen der Variablen: $\frac{dz}{z} = \lambda\cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{z}\,dz = \int \lambda\,dt + k \rightarrow \ln(|z|) = k + \lambda\cdot t$

Auflösen nach $|z|$: $|z| = e^{\lambda\cdot t + k}$

Da $z > 0$ gilt für die allgemeine Lösung: $z(t) = K\cdot e^{\lambda\cdot t}$

Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$z(6) = 950$ $\qquad K\cdot e^{\lambda\cdot 6} = 950 \qquad (1)$

$z(10) = 900$ $\qquad K\cdot e^{\lambda\cdot 10} = 900 \qquad (2)$

$$\frac{(1)}{(2)} \qquad e^{6\cdot\lambda - 10\cdot\lambda} = \frac{950}{900} \qquad \Rightarrow \qquad -4\cdot\lambda = \ln\left(\frac{950}{900}\right)$$

$$\lambda := -\left(\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{950}{900}\right)\right) \qquad \lambda = -\frac{\ln\left(\frac{19}{18}\right)}{4} = -0.0135$$

eingesetzt in (1) $\quad K\cdot e^{\lambda\cdot 6} = 950 \text{ auflösen}, K \rightarrow \frac{9025\cdot\sqrt{38}}{54} = 1030$

Partikuläre Lösung: $\quad z(t) := 1030\cdot e^{-0.0135\cdot t}$