# Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2007

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

**Aufgabe 1**
Ein Getränkemarkt bezieht Bier in Flaschen von 3 verschiedenen Brauereien. Brauerei A liefert zwei Biersorten, Brauerei B drei Sorten und die Brauerei C liefert vier Sorten.

**Teilaufgabe 1.1 (3 BE)**
Es sollen nun je eine Flasche jeder Brauerei und jeder Sorte in einer Reihe nebeneinander aufgestellt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dazu, wenn die Flaschen der einzelnen Brauereien in der Reihe nebeneinander stehen sollen.

$$\left(A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, C_4\right)$$

Permutationen innerhalb jeder Gruppe A, B und C, Permutation der drei Gruppen:

$$N_1 := (2! \cdot 3! \cdot 4!) \cdot 3! \qquad N_1 = 1728$$

**Teilaufgabe 1.2 (4 BE)**
Für eine Werbeaktion werden Träger mit jeweils 4 Flaschen unterschiedlicher Sorten zusammengestellt. Wie viele verschiedene solcher Zusammenstellungen sind möglich, wenn in jedem Träger mindestens eine Flasche von jeder Brauerei enthalten sein muss?

Bei drei Brauereien und 4 Flaschen muss der Träger jeweils aus einer der Brauerei zwei Flaschen enthalten.

zwei von A, eine von B, eine von C + eine von A, zwei von B und eine von C + eine von A, eine von B und zwei von C

$$N_2 = \binom{2}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1} + \binom{2}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{1} + \binom{2}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2} = 12 + 24 + 36 = 72$$

Nebenrechnungen:

$$\text{combin}(2,2)\cdot\text{combin}(3,1)\cdot\text{combin}(4,1) = 12$$

$$\text{combin}(2,1)\cdot\text{combin}(3,2)\cdot\text{combin}(4,1) = 24$$

$$\text{combin}(2,1)\cdot\text{combin}(3,1)\cdot\text{combin}(4,2) = 36$$

**Aufgabe 2.0**
Der Getränkemarkt stellt den Kunden Einkaufswagen zur Verfügung, die mit einem Chip benützt werden können. Kunden, die keinen Chip besitzen, können sich an der Kasse einen Chip abholen. Somit ist sichergestellt, dass jeder Kunde, wenn er es wünscht, einen Einkaufswagen benutzen kann. Bei einer Befragung der Kunden stellt sich heraus:
98 % der Kunden, die einen Chip hatten, benutzten einen Einkaufswagen. 1 % aller Kunden hatte einen Chip, benutzte aber keinen Einkaufswagen, und 10 % der Kunden, die keinen Chip hatten, verwendeten auch keinen Einkaufswagen. Ermitteln Sie:

**Teilaufgabe 2.1 (4 BE)**
Wie viel Prozent aller Kunden hatten einen Chip?
[ Ergebnis: $h(C) = 50\%$ ]

Chip: $C$ kein Chip: $\overline{C}$ Einkaufswagen: $W$ kein Einkaufswagen: $\overline{W}$

Gegeben: (1) $P_C(W) = 0.98$ (2) $P[C \cap \overline{W}] = 0.01$ (3) $P_{\overline{C}}(\overline{W}) = 0.1$

Die Ereignisse C und E sind stochastisch unabhängig

(1) $P_C(W) = \dfrac{P[C \cap W]}{P(C)} = 0.98$

(2) $P[C \cap \overline{W}] = P(C) \cdot P(\overline{W}) = 0.01$

(3) $P_{\overline{C}}(\overline{W}) = \dfrac{P[\overline{C} \cap \overline{W}]}{P(\overline{C})} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad P[\overline{C} \cap \overline{W}] = 0.1 \cdot P(\overline{C})$ (3b)

| | $C$ | $\overline{C}$ | ∎ |
|---|---|---|---|
| $W$ | ∎ | ∎ | ∎ |
| $\overline{W}$ | 0.01 | ∎ | ∎ |
| ∎ | ∎ | ∎ | 1 |

(4) $P_C(\overline{W}) = \dfrac{P[C \cap \overline{W}]}{P(C)} \quad \Rightarrow \quad P[C \cap \overline{W}] = P_C(\overline{W}) \cdot P(C)$

(5) $P_C(\overline{W}) \overset{(1)}{=} 1 - P_C(W) = 0.02$

(5) und (2) einsetzen in (4) $\quad 0.01 = P_C(\overline{W}) \cdot P(C) = 0.02 \cdot P(C)$

$\Rightarrow \quad P(C) = \dfrac{0.01}{0.02} = 0.5$

| | $C$ | $\overline{C}$ | ∎ |
|---|---|---|---|
| $W$ | ∎ | ∎ | ∎ |
| $\overline{W}$ | 0.01 | ∎ | ∎ |
| ∎ | 0.5 | 0.5 | 1 |

**Teilaufgabe 2.2 (2 BE)**
Wie viel Prozent aller Kunden verwendeten keinen Einkaufswagen?

$P(\overline{W}) = P[C \cap \overline{W}] + P[\overline{C} \cap \overline{W}] \overset{(2),\,(3b)}{=} 0.01 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.06$

| | $C$ | $\overline{C}$ | ∎ |
|---|---|---|---|
| $W$ | ∎ | ∎ | ∎ |
| $\overline{W}$ | 0.01 | 0.05 | 0.06 |
| ∎ | 0.5 | 0.5 | 1 |

alles ergänzen

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & C & \overline{C} & \blacksquare \\ W & 0.49 & 0.45 & 0.94 \\ \overline{W} & 0.01 & 0.05 & 0.06 \\ \blacksquare & 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

**Teilaufgabe 2.3 (2 BE)**
Wie viel Prozent aller Kunden, die keinen Einkaufswagen benutzten, hatten einen Chip?

$$P_{\overline{W}}(C) = \frac{P\left[C(\cap)\overline{W}\right]}{P\left(\overline{W}\right)} = \frac{0.01}{0.06} = \frac{1}{6}$$

**Aufgabe 3.0**
Der Besitzer des Getränkemarktes vermutet, dass ziemlich genau 35 % der Kunden Bier von der Brauerei B bevorzugen. Die Angestellten bezweifeln diesen Prozentsatz.

**Teilaufgabe 3.1 (6 BE)**
Die Behauptung $H_0$ des Besitzers soll auf dem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.
Bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese in einem zweiseitigen Test bei einer Befragung von 256 Kunden.

Testgröße: Anzahl X der Kunden, die nur Bier der Brauerei B kaufen unter $n := 256$. $\quad p := 0.35$

$H_0$: $\quad p_0 = 0.35 \qquad$ $H_1$: $\quad p_1 \neq 0.35$

Testart: Zweiseitiger Signifikanztest

$$A = \{\, k_1 + 1, k_1 + 2, \ldots, k_2 \,\} \qquad \overline{A} = \{\, 0, 1, \ldots, k_1 \,\} \cup \{\, k_2 + 1, k_2 + 2, \ldots, 256 \,\}$$

$$P\left(X \le k_1\right) \le \frac{0.05}{2} \qquad \mu := n \cdot p = 89.6 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 7.632$$

$$\Phi\left(\frac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \le 0.025 \quad \overset{\text{TW}}{\Rightarrow} \quad \frac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma} \le -1.960$$

Auflösen: $\quad k_1 := -1.960 \cdot \sigma + \mu - 0.5 \qquad k_1 = 74.142 \qquad$ Abrunden: $\quad k_1 = 74$

$$P\left(X > k_2\right) \le 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P\left(X \le k_2\right) \le 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X \le k_2\right) \ge 0.975$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k_2 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.975 \quad \overset{\text{TW}}{\Rightarrow} \quad \frac{k_2 - \mu + 0.5}{\sigma} \ge 1.960$$

Auflösen: $\quad k_2 := 1.960 \cdot \sigma + \mu - 0.5 \qquad k_2 = 104.058 \qquad$ Aufrunden: $\quad k_2 = 105$

$$\overline{A} = \{\, 0, 1, \ldots, 74 \,\} \cup \{\, 106, 107, \ldots, 256 \,\}$$

**Teilaufgabe 3.2 (4 BE)**
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit man der Behauptung des Besitzers zustimmen wird bei einem Annahmebereich von **A = { 75 , ... , 105 }** der Nullhypothese, obwohl in Wirklichkeit 45 % der Kunden Bier von der Brauerei B bevorzugen.

Gesucht ist der β-Fehler: $p_2 := 0.45$

$\mu_2 := n \cdot p_2 = 115.2$ $\qquad \sigma_2 := \sqrt{n \cdot p_2 \cdot (1 - p_2)} = 7.96$

$$P(A) = P(75 \le X \le 105) = P(X \le 105) - P(X \le 74) = \Phi\left(\frac{105 - \mu_2 + 0.5}{\sigma_2}\right) - \Phi\left(\frac{74 - \mu_2 + 0.5}{\sigma_2}\right)$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{105 - \mu_2 + 0.5}{\sigma_2} = -1.219 \qquad \frac{74 - \mu_2 + 0.5}{\sigma_2} = -5.113$$

$$P(A) = 1 - \Phi(1.219) - (1 - \Phi(5.113)) = \Phi(5.113) - \Phi(1.219) = 1 - 0.88877 = 0.11123$$

**Aufgabe 4 (4 BE)**
Die Brauerei B hat eine neue Etikettieranlage, die bei 5 % der Flaschen das Etikett falsch aufklebt. Berechnen Sie, wie viele Träger (Kasten mit 20 Flaschen) man dem Getränkemarkt liefern müsste, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 1000 richtig etikettierte Flaschen erhält.

$$P(X \ge 1000) \ge 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le 999) \ge 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le 999) \le 0.1$$

**n unbekannt** $\quad p := 0.95 \quad \mu(n) := n \cdot p = 0.95 \cdot n \quad \sigma(n) := \sqrt{\mu(n) \cdot (1 - p)} = \sqrt{0.0475 \cdot n}$

$$\Phi\left(\frac{999 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \le 0.1 \quad \overset{\text{TW}}{\Rightarrow} \quad \frac{999 - \mu + 0.5}{\sigma} \le -1.281$$

Auflösen: $\quad 999 - 0.95 \cdot n + 0.5 \le -1.281 \cdot \sqrt{0.0475 \cdot n}$

$\Leftrightarrow \quad 0.95 \cdot n - 1.281 \cdot \sqrt{0.0475 \cdot n} - 999.5 \ge 0$

Substitution: $\quad \sqrt{n} = z$

$$0.95 \cdot z^2 - 1.281 \cdot \sqrt{0.0475} \cdot z - 999.5 = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} -32.28956419370704644 \\ 32.583445748795236066 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{keine Lösung} \\ \text{Lösung} \end{matrix}$$

Resubstitution: $\quad \sqrt{n} = 32.59 \qquad n := 32.58^2 = 1061.456 \qquad$ aufrunden: $\quad n = 1062$

Anzahl der Träger: $\quad \frac{1062}{20} = 53.1 \qquad$ aufrunden: **54** Träger

**Aufgabe 5**
Die Geschäftsleitung will nun einen Imbissstand als zusätzliches Angebot einrichten. Dazu wurden 350 Kunden befragt. Von diesen zeigten 210 Personen Interesse, der Rest lehnte das Angebot ab.

**Teilaufgabe 5.1** (4 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Befürworter um höchstens 0,5 % vom Erwartungswert abweicht, wenn man von einem Kundenstamm von 5000 Personen ausgeht und den Wert der relativen Häufigkeit bei der Umfrage als Wahrscheinlichkeit interpretiert.

Zufallsgröße X: Anzahl der Interessenten unter 5000 Stammkunden. $n := 5000$

Wahrscheinlichkeit: $p := \frac{210}{350} = \frac{3}{5}$

Erwartungswert: $\mu := n \cdot p = 3000$ $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 34.641$

Abweichung: $0.005 \cdot \mu = 15$

obere Grenze: $\mu + 0.005 \cdot \mu = 3015$

untere Grenze: $\mu - 0.005 \cdot \mu = 2985$

$$P(\mu - 15 \le X \le \mu + 15) = P(X \le \mu + 15) - P(X \le \mu - 15 - 1)$$

$$\Phi\left(\frac{\mu + 15 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 15 - 1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{15.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-15.5}{\sigma}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{15.5}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{15.5}{\sigma}\right)\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{15.5}{\sigma}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(0.447) - 1 = 2 \cdot 0.67364 - 1 = 0.34728$$

**Teilaufgabe 5.2** (4 BE)
Zur Eröffnung des Imbissstandes wurden in einer Werbeaktion 275 Gutscheine für eine Flasche Wein ausgegeben. Die Geschäftsleitung geht davon aus, dass 10 % der Gutscheine nicht eingelöst werden. Deshalb stehen nur 250 Flaschen zur Verfügung. Bestimmen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die 250 Flaschen nicht ausreichen.

Binomialverteilung: $n := 275$ Guschein wird eingelöst: $p := 0.9$

$\mu := n \cdot p = 247.5$ $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ $\sigma = 4.975$

$$P(X > 250) = 1 - P(X \le 250) = 1 - \Phi\left(\frac{250 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(0.603) = 1 - 0.72575 = 0.27425$$