Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2007

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = \ln\left(\frac{x}{x-2\cdot a}\right)$ mit $a \in IR^+$ und der maximalen Definitions-menge $D_{f_a} \subseteq IR$.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

Bestimmen Sie D_{f_a} in Abhängigkeit von a und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a an.

[Teilergebnis: $D_{f_a} = IR \setminus [\,0\,;\,2\cdot a\,]$]

$\frac{x}{x-2\cdot a} > 0$ $\qquad x_1 := 0 \qquad x_2(a) := 2\cdot a$

Graphische Lösung der Ungleichung

		$x \neq 0$	$x \neq 2\cdot a$
Zähler	**neg**	**pos**	**pos**
Nenner	**neg**	**neg**	**pos**
Bruchterm	**pos**	**neg**	**pos**
f(x)		**nicht def.**	

Definitionsmenge:

$D_{f_a} = \;]-\infty\,;0\,[\; \cup \;]\,2a\,;\,\infty\,[$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\overset{\overset{1}{\uparrow}}{\frac{x}{x-2\cdot a}}\right) \to 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \ln\left(\overset{\overset{1}{\uparrow}}{\frac{x}{x-2\cdot a}}\right) \to 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\overset{\overset{0^-}{\uparrow}}{x}}{\underset{\underset{-(2\cdot a)}{\downarrow}}{x-2\cdot a}} \to 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} \ln\left(\overset{\overset{0^+}{\uparrow}}{\frac{x}{x-2\cdot a}}\right) \to -\infty$$

$$\lim_{x \to 2\cdot a^+} \underbrace{\frac{\overbrace{x}^{\textstyle 2\cdot a \atop \uparrow}}{\underbrace{x - 2\cdot a}_{\downarrow \atop \textstyle 0^+}}}_{} \to \infty \qquad\qquad \lim_{x \to 2\cdot a^+} \overbrace{\ln\left(\frac{x}{x-2\cdot a}\right)}^{\textstyle \infty \atop \uparrow} \to \infty$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$ Vertikale Asymptoten: $x_1 = 0$ $x_2 = 2\cdot a$

Aufgabe 1.2 **(5 BE)**
Zeigen Sie, dass der Graph von f_a symmetrisch zum Punkt **S(a / 0)** ist.

Hinweis: $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = -\ln\left(\frac{v}{u}\right)$ (ohne Beweis verwenden)

Transformationsgleichungen: $x = u + a$ $y = v$

Koordinatentransformation: $v = \ln\left(\frac{u+a}{u+a-2\cdot a}\right) = \ln\left(\frac{u+a}{u-a}\right)$ $f\_(u) = \ln\left(\frac{u+a}{u-a}\right)$

$$f\_(-u) = \ln\left(\frac{-u+a}{-u-a}\right) = -\ln\left(\frac{-u-a}{-u+a}\right) = -\ln\left(\frac{u+a}{u-a}\right) = -f\_(u)$$

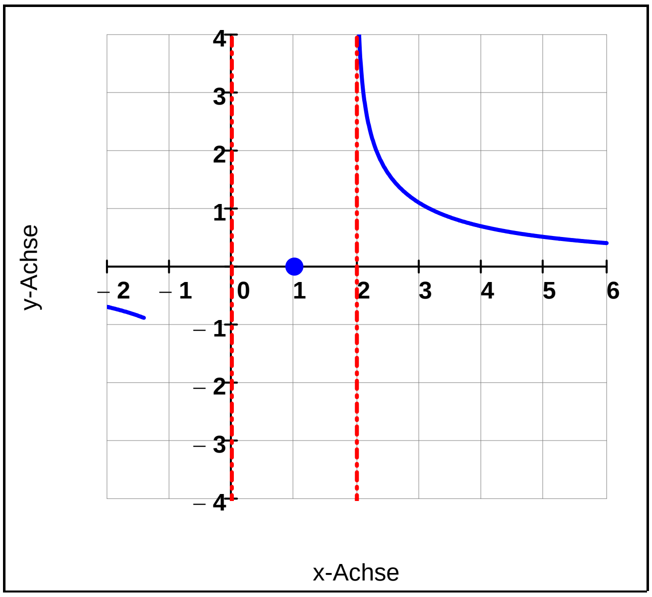
Aufgabe 1.3 **(6 BE)**
Ermitteln Sie $f'_a(x)$ und das Monotonieverhalten des Graphen von f_a.
Zeichnen Sie für den Fall $a = 1$ den Graphen der Funktion f_1 mit den Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem mit $-2 \le x \le 6$.
Teilergebnis: $f'_a(x) = \frac{-2\cdot a}{x\cdot(x-2\cdot a)}$

$$f_a(x) = \ln\left(\frac{x}{x-2\cdot a}\right)$$

$$f'_a(x) = \frac{x-2\cdot a}{x}\cdot\frac{(x-2\cdot a)-x}{(x-2\cdot a)^2} = \frac{x-2\cdot a-x}{x\cdot(x-2\cdot a)} = \frac{-2\cdot a}{x\cdot(x-2\cdot a)}$$

Zähler negativ, weil a>0, Nenner positiv, wegen ID $\Rightarrow$ $f'(x) < 0$ $\Rightarrow$

G_f ist streng mon. fallend in $]-\infty\,;0\,[$ und G_f ist streng mon. fallend in $]\,2\cdot a\,;\,\infty\,[$



$x1 := -2, -1.5 .. -0.5$ $\qquad$ $x2 := 2.5, 3 .. 6$

$x1 =$ $\qquad$ $f(x1) =$

x1	f(x1)
-2	-0.7
-1.5	-0.8
-1	-1.1
-0.5	-1.6

$x2 =$ $\qquad$ $f(x2) =$

x2	f(x2)
2.5	1.6
3	1.1
3.5	0.8
4	0.7
4.5	0.6
5	0.5
5.5	0.5
6	0.4

Aufgabe 1.4 (6 BE)
Der Graph von f_a schließt mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 3 \cdot a$ und $x = 4 \cdot a$ eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass für die Maßzahl dieser Fläche gilt:

$$A(a) = 3 \cdot a \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$A = \int_{3 \cdot a}^{4 \cdot a} \ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a}\right) dx = \int_{3 \cdot a}^{4 \cdot a} (\ln(x) - \ln(x - 2 \cdot a))\, dx$$

$$F(x) = \int \ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a}\right) dx$$

$$u(x) = \ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a}\right) \qquad u'(x) = \frac{-2 \cdot a}{x \cdot (x - 2 \cdot a)}$$

$$v(x) = 1 \qquad v'(x) = x$$

$$F(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a}\right) - \int \frac{-2 \cdot a}{x - 2 \cdot a} dx = x \cdot \ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a}\right) + 2 \cdot a \cdot \ln(|x - 2 \cdot a|)$$

Grenzen einsetzen:

$A = F(4 \cdot a) - F(3 \cdot a)$

$A = 4 \cdot a \cdot \ln\left(\frac{4 \cdot a}{4 \cdot a - 2 \cdot a}\right) + 2 \cdot a \cdot \ln(|4 \cdot a - 2 \cdot a|) - \left(3 \cdot a \cdot \ln\left(\frac{3 \cdot a}{3 \cdot a - 2 \cdot a}\right) + 2 \cdot a \cdot \ln(|3 \cdot a - 2 \cdot a|)\right)$

$A = 4 \cdot a \cdot \ln(2) + 2 \cdot a \cdot \ln(2 \cdot a) - (3 \cdot a \cdot \ln(3) + 2 \cdot a \cdot \ln(a))$

$A = 4 \cdot a \cdot \ln(2) + 2 \cdot a \cdot \ln(2) + 2 \cdot a \cdot \ln(a) - 3 \cdot a \cdot \ln(3) - 2 \cdot a \cdot \ln(a)$

$A = a \cdot (4 \cdot \ln(2) + 2 \cdot \ln(4) - 3 \cdot \ln(3))$

$A = a \cdot (6 \cdot \ln(2) - 3 \cdot \ln(3)) = 3 \cdot a \cdot (\ln(4) - \ln(3)) = 3 \cdot a \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

Aufgabe 2.0
Gegeben ist weiter die Funktion g_a mit $g_a(x) = \arctan(f(x))$ in der Definitionsmenge $D_{g_a} = D_{f_a}$ mit der Funktion f_a aus Aufgabe 1.

Aufgabe 2.1 (6 BE)
Ermitteln Sie $g'_a(x)$ sowie die Wertemenge von g_a.

$g_a(x) = \arctan(f(x))$

$$g'_a(x) = \frac{1}{1 + (f(x))^2} \cdot f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a}\right)\right)^2} \cdot \frac{-2 \cdot a}{x \cdot (x - 2 \cdot a)}$$

$$\frac{1}{1 + (f(x))^2} > 0 \qquad a > 0 \qquad f'(x) < 0$$

$g'_a(x) < 0$ also ist G_{g_a} streng monoton fallend in $]-\infty ; 0[$ und in $]2 \cdot a ; \infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan\left(\ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a}\right)\right) = \arctan(\ln(1)) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \arctan\left(\ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a}\right)\right) = \arctan(\ln(1)) = 0$$

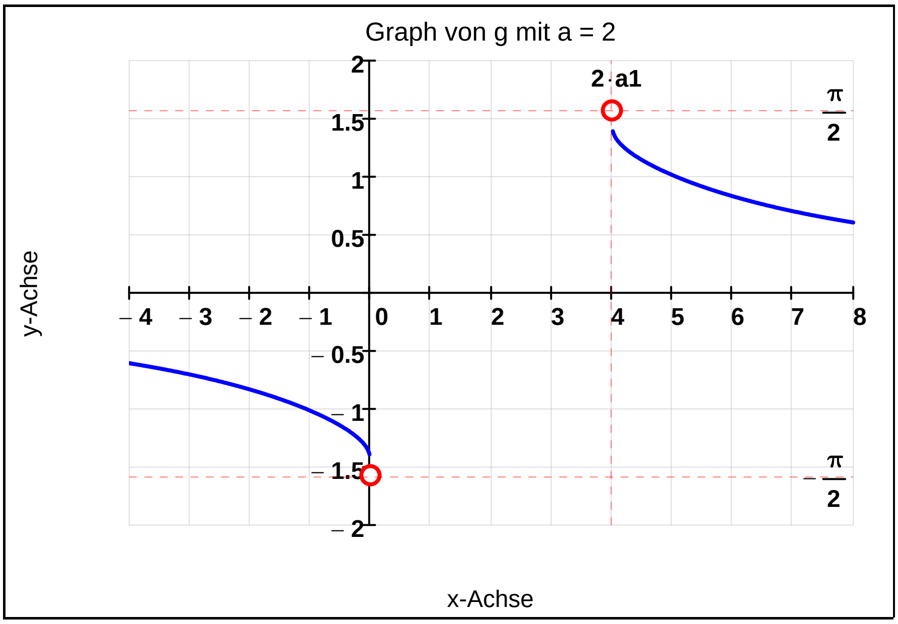
$$\lim_{x \to 0^-} \left(\ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a} \right) \right) \text{ annehmen}, a > 0 \ \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a} \right) \right) \text{ annehmen}, a > 0 \ \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 2 \cdot a^+} \ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a} \right) \text{ annehmen}, a > 0 \ \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \to 2 \cdot a^+} \arctan\left(\ln\left(\frac{x}{x - 2 \cdot a} \right) \right) \text{ annehmen}, a > 0 \ \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Wertemenge: $W = \left] \frac{-\pi}{2} ; 0 \right[\cup \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$



Aufgabe 2.2 **(7 BE)**
Begründen Sie, dass g_a umkehrbar ist. Bestimmen Sie einen Funktionsterm $h_a(x)$ der zugehörigen Umkehrfunktion h_a. Geben Sie auch die Definitionsmenge von h_a an.

G_{g_a} ist streng monoton fallend im Intervall $]-\infty;0[$ mit $W_1 =]\frac{-\pi}{2};0[$ und

G_{g_a} ist streng monoton fallend im Intervall $]0;\infty[$ mit $W_2 =]0;\frac{\pi}{2}[$.

$W_1 \cap W_2 = \{\ \}$, also ist g_a umkehrbar.

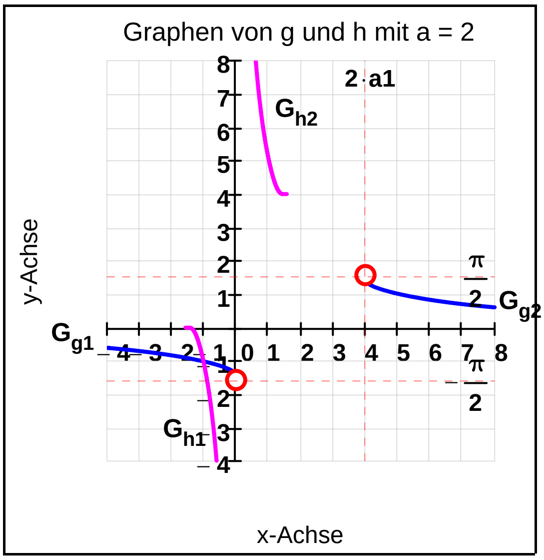
$y = \arctan\left(\ln\left(\frac{x}{x-2\cdot a}\right)\right)$ Vertauschung der Variablen: $x = \arctan\left(\ln\left(\frac{y}{y-2\cdot a}\right)\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \tan(x) = \ln\left(\frac{y}{y-2\cdot a}\right) \qquad \Leftrightarrow \quad e^{\tan(x)} = \frac{y}{y-2\cdot a}$$

$$\Leftrightarrow \quad y\cdot e^{\tan(x)} - 2\cdot a\cdot e^{\tan(x)} = y \qquad \Leftrightarrow \quad y\cdot\left(e^{\tan(x)}-1\right) = 2\cdot a\cdot e^{\tan(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{2\cdot a\cdot e^{\tan(x)}}{e^{\tan(x)}-1}$$

Umkehrfunktion: $h(x,a) := \frac{2\cdot a\cdot e^{\tan(x)}}{e^{\tan(x)}-1}$



Definitionsmenge:

$D1_h =]\frac{-\pi}{2};0[$

$D2_h =]0;\frac{\pi}{2}[$

Wertemenge:

$W1_h =]-\infty;0[$

$W2_h =]0;\infty[$

Aufgabe 2.3 (7 BE)

Bestimmen Sie für $\mathbf{a = 1}$ die Steigung des Graphen von $\mathbf{h_1}$ an der Stelle $\mathbf{x_0 = \frac{\pi}{4}}$, ohne die Umkehrfunktion $\mathbf{h_1}$ selbst abzuleiten.

$$g_1(x) := \arctan\left(\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)\right) \qquad g'_1(x) := \frac{1}{1+\left(\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)\right)^2} \cdot \frac{-2}{x\cdot(x-2)}$$

Berechnung des Urbildes:

$$\arctan\left(\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x-2} = e \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = e\cdot x - 2\cdot e \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot(e-1) = 2\cdot e \quad \Leftrightarrow \quad x_1 := \frac{2\cdot e}{e-1}$$

$$h'_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{g'_1\left(\frac{2\cdot e}{e-1}\right)}$$

$$g'_1\left(\frac{2\cdot e}{e-1}\right) = \frac{1}{1+\left(\ln\left(\frac{\frac{2\cdot e}{e-1}}{\frac{2\cdot e}{e-1}-2}\right)\right)^2} \cdot \frac{-2}{\frac{2\cdot e}{e-1}\cdot\left(\frac{2\cdot e}{e-1}-2\right)}$$

$$g'_1\left(\frac{2\cdot e}{e-1}\right) = \frac{1}{1+\left(\ln\left(\frac{2\cdot e}{2\cdot e-2\cdot e+2}\right)\right)^2} \cdot \frac{-2}{\frac{2\cdot e}{e-1}\cdot\left(\frac{2\cdot e-2\cdot e+2}{e-1}\right)}$$

$$g'_1\left(\frac{2\cdot e}{e-1}\right) = \frac{1}{1+(\ln(e))^2} \cdot \frac{-2}{\frac{2\cdot e}{e-1}\cdot\frac{2}{e-1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-(e-1)^2}{2\cdot e} = \frac{-1}{4}\cdot\frac{(e-1)^2}{e}$$

$$\boxed{h'_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4\cdot e}{(e-1)^2}}$$

Aufgabe 3
Bei einer chemischen Reaktion vereinigt sich ein Molekül A mit einem Molekül B zu einem neuen Molekül AB. In einem Laborversuch sind zu Beginn der Reaktion von beiden Molekülarten jeweils M Moleküle vorhanden. Die Umsatzvariable N(t) beschreibt die Anzahl der neuen Moleküle zum Zeitpunkt t mit $t \geq 0$.

Für N(t) gilt in guter Näherung die Differentialgleichung $\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot (M - N(t))^2$,

wobei k > 0 eine Konstante ist.

Aufgabe 3.1 **(5 BE)**
Ermitteln Sie die spezielle Lösung der separierbaren Differentialgleichung für $N(0) = 0$.

[Mögliches Ergebnis: $N(t) = \frac{k \cdot M^2 \cdot t}{k \cdot M \cdot t - 1}$]

Gegebene DGL: $\frac{dN}{dt} = k \cdot (M - N)^2$

Trennen der Variablen: $\frac{dN}{(M - N)^2} = k \cdot dt$ $\qquad N := N$

Integration: $\int \frac{1}{(M - N)^2} \, dN = \int k \, dt + c \rightarrow \frac{1}{M - N} = c + k \cdot t$

Auflösen nach N: $\frac{1}{M - N} = k \cdot t + c$ auflösen, N $\rightarrow M - \frac{1}{c + k \cdot t}$

Allgemeine Lösung: $N(t) = M - \frac{1}{c + k \cdot t}$

Anfangsbedingung: $N(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M - \frac{1}{c} = 0$ auflösen, c $\rightarrow \frac{1}{M}$

$$N(t) = M - \frac{1}{\frac{1}{M} + k \cdot t} = M - \frac{M}{1 + k \cdot t \cdot M} = \frac{M \cdot (1 + k \cdot t \cdot M) - M}{1 + k \cdot t \cdot M} = \frac{k \cdot M^2 \cdot t}{1 + k \cdot M \cdot t}$$

Partikuläre Lösung: $N(t) = \frac{k \cdot M^2 \cdot t}{1 + k \cdot M \cdot t}$

Aufgabe 3.2 **(3 BE)**
Berechnen Sie in Abhängigkeit von k und M, zu welchem Zeitpunkt t_0 N(t) 99% des Endwertes erreicht hat.

$$N(t_0) = 0.99 \cdot M \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{k \cdot M^2 \cdot t_0}{1 + k \cdot M \cdot t_0} = 0.99 \cdot M \text{ auflösen}, t_0 \;\rightarrow\; \frac{99.0}{M \cdot k}$$

$$t_0 = \frac{99}{M \cdot k}$$

Aufgabe 4 **(8 BE)**
Bestimmen Sie für $x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' \cdot \cos(x) + y \cdot \sin(x) - 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) = 0$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.

Homogene DGL: $y' \cdot \cos(x) + y \cdot \sin(x) = 0$

$$y' = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot y \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot y$$

Triviale Lösung: $y = 0$

Trennen der Variablen: $\displaystyle \int \frac{1}{y}\, dy = \int -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx$ mit $y \neq 0$

$\ln(|y|) = \ln(\cos(x)) + k$ ohne Betrag, da $x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$

$$|y| = e^{\ln(\cos(x))+k} = e^k \cdot \cos(x)$$

Mit trivialer Lösung: $y_h(x) = K \cdot \cos(x)$

Variation der Konstanten: $y_p(x) = K(x) \cdot \cos(x)$

$$y'_p(x) = K'(x) \cdot \cos(x) - K(x) \cdot \sin(x)$$

Einsetzen in DGL:

$$(K'(x)\cdot\cos(x) - K(x)\cdot\sin(x))\cdot\cos(x) + K\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) = 2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)$$

Vereinfachen:

$$K'(x)\cdot(\cos(x))^2 = 2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)$$

$$K'(x) = 2\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$K(x) = -2\cdot\ln(\cos(x))$$

$$y_p(x) = (-2\cdot\ln(\cos(x)))\cdot\cos(x)$$

$$y_A(x) = y_h(x) + y_p(x) = K\cdot\cos(x) - 2\cdot\ln(\cos(x))\cdot\cos(x)$$

Graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt.

$y1(x,k) := k\cdot\cos(x)$ $\qquad$ $y2(x,k) := k\cdot\cos(x) - 2\cdot\ln(\cos(x))\cdot\cos(x)$