Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2007

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

made with mathcad

Aufgabe 1
Beim Spiel "Mensch ärgere Dich nicht" darf man das Spiel nur beginnen, wenn man eine 6 würfelt, wobei man eine Serie aus maximal drei Würfen ausführen darf.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Berechnen Sie für eine Serie mit einem Laplace-Würfel die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
E: "Die erste 6 erscheint beim dritten Wurf."
F: "Die erste 6 erscheint spätestens beim dritten Wurf."
[Teilergebnis: $P(F) = \frac{91}{216}$

$E = \{ (x, x, 6, x, x, x) \}$

$$P(E) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

1. Wurf   2. Wurf   3. Wurf

$$\underset{\text{1. Wurf}}{\downarrow}\quad\underset{\text{2. Wurf}}{\downarrow}\quad\underset{\text{3. Wurf}}{\downarrow}$$

$$P(F) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + P(E) = \frac{91}{216}$$

oder: $\overline{F}$ = {keine 6 bei allen drei Würfen}

$P(\overline{F})$

$$P(F) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{91}{216}$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Ermitteln Sie, wie viele Serien man mit einem Laplace-Würfel mindestens ausführen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% ins Spiel zu kommen.

Die mehrmalige Durchführung von Würfelserien entspricht einer Bernoullikette der Länge $\mathbf{n}$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = P(F) = \frac{91}{216}$ und $q := 1 - \frac{91}{216} = \frac{125}{216}$.

$P(G) = P(X \geq 1)$

$$P(X \geq 1) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) \leq 0.05$$

$$\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^n \leq 0.054 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{125}{216}\right)^n \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln\left(\frac{125}{216}\right) \leq \ln(0.05)$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0.05)}{\ln\left(\frac{125}{216}\right)} \qquad n := \frac{\ln(0.05)}{\ln\left(\frac{125}{216}\right)} \qquad n = 5.477$$

aufrunden: $n := \mathrm{ceil}(n) = 6$

Man muss mindestens 6 Serien ausführen.

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)
Bei einem gezinkten Würfel beträgt die Wahrscheinlichkeit, bei der ersten Serie beginnen zu können, 0,50. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 6 bei einem Wurf für diesen Würfel.

H: Bei der ersten Serie wird die 6 geworfen $P(H) = 0.5$

K: Bei einem Wurf wird eine 6 geworfen. $\overline{K}$: Bei einem Wurf wird keine 6 geworfen.

$$\left(P\left(\overline{K}\right)\right)^3 = P\left(\overline{H}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (1 - P(K))^3 = \frac{1}{2}$$

$$1 - P(K) = \sqrt[3]{0.5}$$

$$P(K) = 1 - \sqrt[3]{0.5} = 0.2063$$

$$p_0 := 0.2063$$

Probe (nicht verlangt)

$$P_F := p_0 + \left(1 - p_0\right) \cdot p_0 + \left(1 - p_0\right)^2 \cdot p_0 \rightarrow 0.500000994047$$

gerundet: $P_F = 0.5$

Teilaufgabe 2.0
Aufgrund langjähriger Beobachtungen weiß man, dass 4% der Fahrgäste, welche die U-Bahn einer Großstadt benutzen, keinen gültigen Fahrausweis besitzen, also "schwarz" fahren.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Ermitteln Sie mithilfe der Normalverteilung als Näherung, wieviele Fahrgäste von den Kontrolleuren mindestens überprüft werden müssen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens 50 Fahrgäste ohne Fahrausweis ertappen. Begründen Sie, dass die Näherung mithilfe der Noramlverteilung sinnvoll war.

X: Anzahl der Schwarzfahrer bei n kontrollierten Fahrgästen.

$$P(X \geq 50) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 49) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 49) \leq 0.01$$

$$\mu = 0.04 \cdot n \qquad \sigma = \sqrt{0.04 \cdot n \cdot 0.96} = 0.196 \cdot \sqrt{n}$$

$$\Phi\left(\frac{49 - 0.04 \cdot n + 0.5}{0.196 \cdot \sqrt{n}}\right) \leq 0.01$$

$$\frac{49 - 0.04 \cdot n + 0.5}{0.196 \cdot \sqrt{n}} \le -2.326$$

$$49 - 0.04 \cdot n + 0.5 \le -2.326 \cdot 0.196 \cdot \sqrt{n}$$

Substitution: $\sqrt{n} = z$

$$0.04 \cdot z^2 - 0.456 \cdot z - 49.5 \ge 0 \; \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 4 \end{array} \right. \rightarrow 41.34 \le z < \infty \vee -\infty < z \le -29.94$$

$z_0 := 41.34$ $\qquad n := z_0^{\,2} = 1708.996$

aufrunden: $\quad \mathrm{ceil}(n) = 1709$

Es müssen 1709 Fahrgäste überpürft werden. $\qquad p_0 := p_0$

Teilaufgabe 2.2
Die schlechte wirtschaftliche Lage vieler Bewohner der Großstadt lässt den Verdacht aufkommen, dass der Prozentsatz der Schwarzfahrer gestiegen ist. Um die Vermutung zu überprüfen, wird ein Signifikanztest durchgeführt, wobei 500 zufällig ausgewählte Fahrgäste kontolliert werden sollen.

Teilaufgabe 2.2.1 (7 BE)
Ermitteln Sie für die Nullhypothese "Höchstens 4% der Fahrgäste sind Schwarzfahrer" den Annahme- und Ablehnungsbereich auf dem Signifikanzniveau von 5%.

Testgröße: Anzahl X der Schwarzfahrer unter $n := 500$ kontrollierten Fahrgästen. $\qquad p := 0.04$

H_0: $\quad p_0 \le p \rightarrow p_0 \le 0.04 \qquad H_1$: $\quad p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.04$

Testart: Rechtseitiger Signifikanztest

$A = \{ 0, 1, \ldots, k \}$ $\qquad \overline{A} = \{ k+1, k+2, \ldots, 500 \}$

$$P(X \ge k+1) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le k) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le k) \ge 0.95$$

$\mu_0 := n \cdot p = 20$ $\qquad \sigma_0 := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 4.382$

$$\Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.95 \quad \overset{\text{TW}}{\Rightarrow} \quad \frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \ge 1.645$$

Auflösen: $\quad k_1 := 1.645 \cdot \sigma_0 + \mu_0 - 0.5 \qquad k_1 = 26.708$ $\qquad$ Aufrunden: $\quad k_1 = 27$

$A = \{ 0, 1, \ldots, 27 \}$ $\qquad \overline{A} = \{ 28, 29, \ldots, 500 \}$

Teilaufgabe 2.2.2 (5 BE)
Bestimmen Sie, wie groß bei diesem Test mit den in Aufgabe 2.2.1 ermittelten Bereichen die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Nullhypothese angenommen wird, obwohl die tatsächliche Anteil der Schwarzfahrer auf 6% gestiegen ist.
Wie kann diese Irrtumswahrscheinlichkeit verringert werden?

$p_1 := 0.06$

$\mu_1 := n \cdot p_1 = 30 \qquad \sigma_1 := \sqrt{n \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)} = 5.31$

$$P(A) = P(X \leq 27) = \Phi\left(\frac{27 - \mu_1 + 0.5}{\sigma_1}\right) = \Phi(-0.471) = 1 - \Phi(0.471) = 1 - 0.68 = 0.32$$

Die Irrtumswahrscheinlichkeit kann verringert werden, indem die Anzahl der kontrollierten Fahrgäste erhöht wird oder der Annahmebereich verkleinert wird.

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)
Kontrolleur Adlerauge glaubt, dass sich am Monatsende der Prozentsatz der Schwarzfahrer auf 10% erhöht. Diese Hypothese soll bei 200 kontrollierten Fahrgästen am Monatsende überprüft werden. ermitteln Sie den kleinsten Annahmebereich für diese Hypothese, wenn die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich am niedrigeren Schwarzfahreranteil festzuhalten, höchstens 0,30 betragen soll.
Berechnen Sie für diesen Annahmebereich die Wahrscheinlichkeit, sich irrtümlich für diese Erhöhung zu entscheiden.

Testgröße: Anzahl X der Schwarzfahrer unter $n := 200$ kontrollierten Fahrgästen.

H_1: $p_0 := 0.1$ $\qquad H_2$: $p_1 := 0.04$ $\qquad$ Binomialverteilung möglich.

Testart: Alternativtest

Annahmebereich von H_1: $A_0 = \{ 0, 1, ..., k \}$

Annahmebereich von H_1: $A_1 = \{ k+1, k+2, ..., 200 \}$

$$P(A_0) \leq 0.30 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \leq 0.30 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} B(200, 0.1, i) \leq 0.30$$

$$k_0 := \begin{cases} \text{qbinom}(0.30, 200, 0.1) & \text{if } \text{pbinom}(\text{qbinom}(0.30, 200, 0.1), 200, 0.1) \leq 0.30 \\ (\text{qbinom}(0.30, 200, 0.1) - 1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$k_0 = 17$

Probe: $\text{pbinom}(17, 200, 0.1) = 0.285 \qquad \text{pbinom}(18, 200, 0.1) = 0.372$

$A_0 = \{\ 0, 1, \ldots, 17\}$ $\qquad$ $A_1 = \{\ 18, 19, \ldots, 200\}$

$$P(A_1) = P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - \sum_{i=1}^{17} B(200, 0.04, i) = 1 - 0.99876 = 0.00124$$

Nebenrechnung: $\text{pbinom}(17, 200, 0.04) = 0.99876$

Teilaufgabe 2.4 (5 BE)
In einer anderen Großstadt haben 70% der Fahrgäste der U-Bahn ihren Wohnsitz in der Stadt. Umfangreiche Kontrollen ergaben einen Schwarzfahreranteil von 5,4%, wobei durchschnittlich zwei von neun Schwarzfahrern Auswärtige sind.
Berechnen Sie den Prozentsatz der Schwarzfahrer unter den Stadtbewohnern.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast in der Stadt wohnt und einen gültigen Fahrausweis besitzt.

S: "Ein zufällig kontrollierter Fahrgast ist Schwarzfahrer."

A: "Ein zufällig kontrollierter Fahrgast ist ein Auswärtiger."

Gegeben: $P(\overline{A}) = 0.70$ $\qquad$ $P(S) = 0.054$ $\qquad$ $P_S(A) = \frac{2}{9}$

Gesucht: $P_{\overline{A}}(S)$ $\qquad$ $P(\overline{A} \cap \overline{S})$

Lösung:

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap S) = P_S(A) \cdot P(S) = \frac{2}{9} \cdot 0.054 = 0.012$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & A & \overline{A} & \blacksquare \\ S & 0.012 & 0.042 & 0.054 \\ \overline{S} & 0.288 & 0.658 & 0.946 \\ \blacksquare & 0.30 & 0.70 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{2}{9} \cdot 0.054 = 0.012$ $\qquad$ $0.946 - 0.288 = 0.658$

$0.054 - 0.012 = 0.042$ $\qquad$ $1 - 0.054 = 0.946$

$0.30 - 0.012 = 0.288$

$$P_{\overline{A}}(S) = \frac{P(\overline{A} \cap S)}{P(\overline{A})} = \frac{0.042}{0.70} = 0.06$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{S}) = 0.658$$