Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2008

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist die reelle Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = IR$ durch

$$f(x) = \begin{cases} -2\cdot \arcsin\left(e^{-x} - 1\right) & \text{if } x \geq 0 \\ 2\cdot \arcsin\left(e^{x} - 1\right) & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Teilaufgabe 1.1 **(7 BE)**
Bestimmen Sie die Nullstelle von f. Ermitteln Sie rechnerisch das Symmetrieverhalten des Graphen von f. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Gaphen von f an.

Sei $x \geq 0$:

$$-2\cdot \arcsin\left(e^{-x} - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} = 1 \qquad \boxed{x_0 = 0}$$

Sei $x < 0$:

$$2\cdot \arcsin\left(e^{x} - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x} = 1 \qquad x = 0$$ nicht definiert

$$f_{rechts}(x) := -2\cdot \operatorname{asin}\left(e^{-x} - 1\right)$$

$$f_{links}(x) := 2\cdot \operatorname{asin}\left(e^{x} - 1\right) \qquad f_{links}(-x) = 2\cdot \operatorname{asin}\left(e^{-x} - 1\right)$$

$\Rightarrow \quad f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

$$\lim_{x \to \infty} \left(-2\cdot \operatorname{asin}\left(\overset{\overset{0}{\uparrow}}{e^{-x}} - 1\right)\right) \rightarrow \pi$$

$$\downarrow$$

$$\operatorname{asin}(-1) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

waagrechte Asymptote $y_1 = \pi$

wegen Punktsymmetrie: $$\lim_{x \to -\infty} \left(2\cdot \operatorname{asin}\left(e^{x} - 1\right)\right) \rightarrow -\pi$$

waagrechte Asymptote $y_2 = -\pi$

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Gaphen von f und begründen Sie, dass die Funktion f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist.

[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2 \cdot e^{x} - 1}}$ für $x > 0$]

$$f1'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 - \left(e^{-x} - 1\right)^2}} \cdot (-1) \cdot e^{-x} = \frac{2 \cdot e^{-x}}{\sqrt{2 \cdot e^{-x} - e^{-2 \cdot x}}} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot e^{-x} - e^{-2 \cdot x}} \cdot e^{x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\left(2 \cdot e^{-x} - e^{-2 \cdot x}\right) \cdot e^{2 \cdot x}}} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot e^{x} - 1}}$$

$$f2'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(e^{x} - 1\right)^2}} \cdot e^{x} = \frac{2 \cdot e^{x}}{\sqrt{2 \cdot e^{x} - e^{2 \cdot x}}} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot e^{x} - e^{2 \cdot x}} \cdot e^{-x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\left(2 \cdot e^{x} - e^{2 \cdot x}\right) \cdot e^{-2 \cdot x}}} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot e^{-x} - 1}}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2 \cdot e^{x} - 1}} & \text{if } x \ge 0 \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{2 \cdot e^{-x} - 1}} & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(2 \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\operatorname{asin}\left(\overset{\substack{1 \\ \uparrow}}{e^{x}} - 1\right)}\right) \to 0$$ und $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ G_f ist stetig an der Stelle $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{\underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{\sqrt{2 \cdot e^{-x} - 1}}} \to 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{\underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{\sqrt{2 \cdot e^{x} - 1}}} \to 2$$

G_f ist differenzierbar an der Stelle $x = 0$, es gilt: $f'(0) = 2$

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
Bestimmen Sie nun das Monotonieverhalten des Gaphen von **f'** und geben Sie Art und Koordinaten des Graphen von **f'** an.

$$f1''(x) = 2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(2\cdot e^{x}-1\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot 2\cdot e^{x} = \frac{-2\cdot e^{x}}{\sqrt{\left(2\cdot e^{x}-1\right)^{3}}} \qquad \text{für } x \geq 0$$

$$f2''(x) = 2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(2\cdot e^{-x}-1\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot\left(-2\cdot e^{-x}\right) = \frac{2\cdot e^{x}}{\sqrt{\left(2\cdot e^{-x}-1\right)^{3}}} \qquad \text{für } x < 0$$

f' ist stetig bei $x = 0$. Deshalb gilt:

$G_{f'}$ ist streng monoton steigend in $]-\infty;\ 0]$ und streng monoton fallend in $[\ 0;\ \infty[$

$G_{f'}$ besitzt den Hochpunkt **(0/2).**

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Prüfen Sie, ob $f''(0)$ existiert, und zeigen Sie, dass der Ursprung des Koordinatensystems Wendepunkt des Graphen von f ist.
[Teilergebnis: $f''(x) = -2\cdot e^{x}\cdot\left(2\cdot e^{x}-1\right)^{-1.5}$ für $x > 0$]

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2\cdot e^{x}}{\sqrt{\left(2\cdot e^{x}-1\right)^{3}}} & \text{if } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{2\cdot e^{x}}{\sqrt{\left(2\cdot e^{-x}-1\right)^{3}}} & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

$$f1''(0) = \frac{-2\cdot e^{0}}{\sqrt{\left(2\cdot e^{0}-1\right)^{3}}} = \frac{-2}{\sqrt{(2-1)^{3}}} = -2$$

$\Rightarrow$ $f''(0)$ existiert nicht.

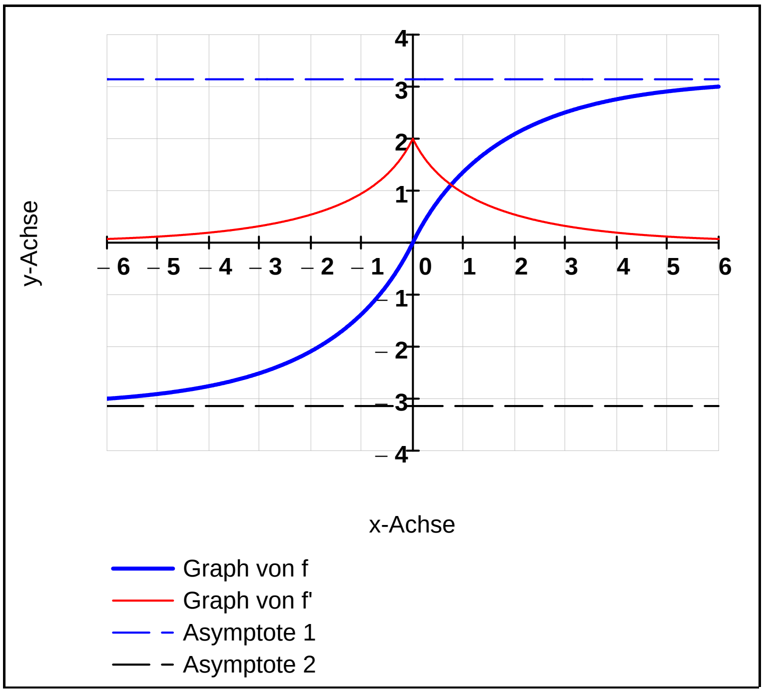
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2\cdot e^{0}}{\sqrt{\left(2\cdot e^{0}-1\right)^{3}}} = \frac{2}{\sqrt{\left(2\cdot e^{0}-1\right)^{3}}} = 2$$

$$\frac{-2\cdot e^{x}}{\sqrt{\left(2\cdot e^{x}-1\right)^{3}}} < 0 \text{ für } x \ge 0 \;\Rightarrow\; G_f \text{ ist rechtsgekrümmt in } [\,0;\ \infty\,[$$

$$\frac{2\cdot e^{x}}{\sqrt{\left(2\cdot e^{-x}-1\right)^{3}}} > 0 \text{ für } x < 0 \;\Rightarrow\; G_f \text{ ist linksgekrümmt in }]-\infty;\ 0\,]$$

$G_{f'}$ besitzt den Hochpunkt **(0/2)**, G_f besitzt den Wendepunkt **(0/0)**.

Teilaufgabe 1.5 (6 BE)
Zeichnen Sie für $-6 \le x \le 6$ die Graphen der Funktionen f und f' in ein kartesisches Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).



Teilaufgabe 1.6 (6 BE)

Gegeben ist die Integralfunktion F mit $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ mit $x \in IR$.

Begründen Sie, dass die Funktion F genau zwei Nullstellen besitzt, und geben Sie diese an.

erste Nullstelle $x_1 = -1$, da $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$

zweite Nullstelle $x_2 = 1$, da G_f punktsymmetrisch ist.

Teilaufgabe 2
Gegeben sind die reellen Funktion g und h mit $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ und

$$h(x) = \frac{4}{\sqrt{x \cdot (x-1) \cdot \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}}$$ mit der in IR maximalen Definitionsmenge D_h.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Zeigen Sie, dass gilt: $D_h =]1\,;\,\infty[$.

1. Bedingung: $x \cdot (x-1) \cdot \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$

$\frac{x}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x-1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \vee x > 1$

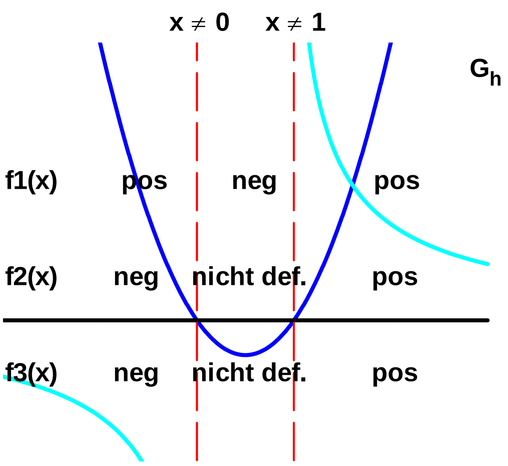
2. Bedingung:

Für $x < 0$ gilt $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) < 0$, da $0 < \frac{x}{x-1} < 1$.

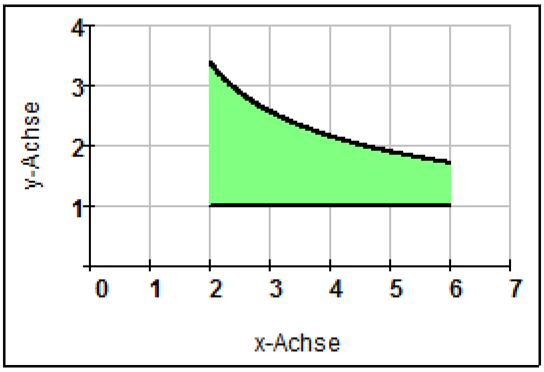
Für $x > 1$ gilt $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$, da $\frac{x}{x-1} > 1$. $\quad \Rightarrow \quad D_h =]1\,;\,\infty[$

Graphische Veranschaulichung:

$f1(x) = x \cdot (x-1) \qquad f2(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \qquad f3(x) = x \cdot (x-1) \cdot \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$



Teilaufgabe 2.2 (8 BE)
Nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen g und h für $2 \le x \le 6$.
Rotiert die getönte Fläche um die x-Achse, so entsteht ein rotationssymmetrischer Körper. Berechnen Sie die Maßzahl V des Volumeninhalts dieses Körpers auf zwei Nachkommastellen genau.
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $t = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.



$$V = \pi \cdot \left[\int_2^6 \left[(h(x))^2 - (g(x))^2\right] dx\right]$$

$$H(x) = \int (h(x))^2\, dx = \int \frac{16}{x\cdot(x-1)\cdot\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}\, dx \qquad G(x) = \int 1\, dx = x$$

Substitution: $z = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{1\cdot(x-1) - x\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x\cdot(x-1)} \quad \Rightarrow \quad dx = -x\cdot(x-1)\cdot dz$$

$$H(z) = \int \frac{-16}{z}\, dz = -16\cdot\ln(z)$$

Resubstitution: $H(x) = -16\ln\left(\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$

$V_1 = \pi\cdot(H(6) - H(2)) = -16\cdot\pi\cdot\left(\ln\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{2}{1}\right)\right)\right)$ Gerundet: $V_1 = 67.128$

$V_2 = \pi\cdot(G(6) - G(2)) = 4\cdot\pi$ Gerundet: $V_2 = 12.566$

$V = V_1 - V_2 = 67.128 - 12.566 = 54.562$ Gerundet: $V = 54.56$

Teilaufgabe 3 (10 BE)
Werden ein Kondensator der Kapazität C und ein ohmscher Widerstand R in Reihenschaltung an eine Gleichspannungsquelle der Kapazität C und ein ohmscher Widerstand R in Reihenschaltung an eine Gleichspannungsquelle der Spannung U angeschlossen, ergibt sich die Differentialgleichung

$$R \cdot C \cdot Q'(t) + Q(t) = \frac{C \cdot U}{T} \cdot t$$

mit den physikalischen Konstanten C, T, T, U für die Ladung $Q(t)$ auf dem Kondensator.
Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung mithife der Variation der Konstanten mit $Q(0) = 0$

Gegebene inhomogene DGL: $R \cdot C \cdot Q' + Q = \frac{C \cdot U}{T} \cdot t$

Homogene DGL: $R \cdot C \cdot Q' + Q = 0$

Umformung: $Q' = \frac{-1}{R \cdot C} \cdot Q$

Differentialquotient: $\frac{dQ}{dt} = \frac{-1}{R \cdot C} \cdot Q$

Trennen der Variablen: $\frac{dQ}{Q} = \frac{-1}{R \cdot C} \cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{Q} \, dQ = \int \frac{-1}{R \cdot C} \, dt + k \rightarrow \ln(Q) = k - \frac{t}{C \cdot R}$

Delogarithmieren: $Q = e^{\frac{-t}{R \cdot C} + k} = K \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems: $Q_H(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}$

Variation de Konstanten: $Q_S(t) = K(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}$

Ableitung: $Q'(t) = K'(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} + K(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \cdot \left(\frac{-1}{R \cdot C}\right)$

Einsetzen in die inhomogene DGL:

$$R \cdot C \cdot \left[K'(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} + K(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \cdot \left(\frac{-1}{R \cdot C}\right)\right] + K(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} = \frac{C \cdot U}{T} \cdot t \rightarrow C \cdot R \cdot K'(t) \cdot e^{-\frac{t}{C \cdot R}} = \frac{C \cdot U \cdot t}{T}$$

$$C \cdot R \cdot K'(t) \cdot e^{-\frac{t}{C \cdot R}} = \frac{C \cdot U \cdot t}{T} \text{ auflösen}, K'(t) \rightarrow \frac{U \cdot t \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}}}{R \cdot T} \qquad \Rightarrow \qquad K'(t) = \frac{U \cdot t \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}}}{R \cdot T}$$

Integration: $$K(t) = \int \frac{U \cdot t \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}}}{R \cdot T}\, dt$$

Partielle Integration: $$\int \frac{U \cdot t \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}}}{R \cdot T}\, dt = \frac{C \cdot U \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}} \cdot (t - C \cdot R)}{T}$$

$$Q_S(t) = \left[\frac{C \cdot U \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}} \cdot (t - C \cdot R)}{T} \right] \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \rightarrow Q_S(t) = \frac{C \cdot U \cdot (t - C \cdot R)}{T}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$Q_A(t) = Q_H(t) + Q_S(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} + \frac{C \cdot U \cdot (t - C \cdot R)}{T}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung: $Q_A(0) = 0$

$$K \cdot e^{0} + \frac{C \cdot U \cdot (0 - C \cdot R)}{T} = 0 \text{ auflösen}, K \rightarrow \frac{C^2 \cdot R \cdot U}{T}$$

Partikuläre Lösung: $$Q_P(t) = \frac{C^2 \cdot R \cdot U}{T} \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} + \frac{C \cdot U \cdot (t - C \cdot R)}{T}$$

$$Q_P(t) = \frac{C \cdot U}{T} \cdot \left(t - R \cdot C + R \cdot C \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}\right)$$