Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2008

- **Mathematik 13 Technik - A II - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{(1 + a \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}}{1 + x^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot x}}$ sowie die Integralfunktion F_a mit

$F_a(x) = \int_0^x f_a(t)\, dt$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 1.1 (9 BE)

Bestimmen Sie die Nullstelle von f_a und durch eine geeignete Rechnung das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge in Abhängigkeit von a.

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + a \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{-1}{a}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(1 + a \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}}{1 + x^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot x}} \text{ annehmen}, a > 0 \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(1 + a \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}}{1 + x^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot x}} \text{ annehmen}, a > 0 \rightarrow 0$$

Schritt für Schritt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(1 + a \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}}{1 + x^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot x}} = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{a \cdot e^{a \cdot x} + (1 + a \cdot x) \cdot a \cdot e^{a \cdot x}}{2 \cdot x \cdot e^{2 \cdot a \cdot x} + x^2 \cdot 2 \cdot a \cdot e^{2 \cdot a \cdot x}} \right] = \blacksquare$$

(∞ / ∞, L'Hosp.)

$$\blacksquare = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{a + a + a^2 \cdot x}{e^{a \cdot x} \cdot \left(2 \cdot x + 2 \cdot a \cdot x^2\right)} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{a^2}{a \cdot e^{a \cdot x} \cdot \left(2 \cdot x + 2 \cdot a \cdot x^2\right) + e^{a \cdot x} \cdot (2 + 4 \cdot a \cdot x)} = 0$$

(∞ / ∞, L'Hosp.)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{(1 + a \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}}}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{1 + x^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot x}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{0}{1} = 0$$

Nebenrechnung 1

Nebenrechnung 2

Nebenrechnung 1:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[(1 + a \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}\right] = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\overset{\overset{-\infty}{\uparrow}}{1 + a \cdot x}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{-a \cdot x}}}\right) \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{a}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{-a \cdot e^{-a \cdot x}}} = 0$$

Nebenrechnung 2:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{x^2}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{-2 \cdot a \cdot x}}}\right) \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{2 \cdot x}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{-2 \cdot a \cdot e^{-2 \cdot a \cdot x}}} = \blacksquare$$

$$\blacksquare = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{4 \cdot a^2 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot x}}} = 0$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Ermitteln Sie die x-Werte, für die der Graph von f_a oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse verläuft.

Das Vorzeichen von $f_a(x)$ wird bestimmt durch den Term $1 + a \cdot x$.

$$1 + a \cdot x > 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{annehmen}, a > 0 \\ \text{auflösen}, x \end{array} \right. \rightarrow -\frac{1}{a} < x$$

$$1 + a \cdot x < 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{annehmen}, a < 0 \\ \text{auflösen}, x \end{array} \right. \rightarrow -\frac{1}{a} < x$$

G_{f_a} liegt oberhalb der x-Achse für $x > -\frac{1}{a}$, G_{f_a} liegt unterhalb der x-Achse für $x < -\frac{1}{a}$.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Bestimmen Sie, ohne die Integration durchzuführen, das Monotonieverhalten und eventuelle Extremstellen des Graphen von F_a und deren Art.

$$F'_a(x) = f_a(x)$$

G_{F_a} ist streng monoton fallend für $x < -\frac{1}{a}$, G_{F_a} ist streng monoton steigend für $x > -\frac{1}{a}$.

Der Graph von F besitzt an der Stelle $x_T = \frac{-1}{a}$ ist einen Tiefpunkt.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion h_a mit $h_a(x) = \arctan\left(x \cdot e^{a \cdot x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion der Funktion f_a ist, und begründen Sie, dass gilt: $F_a = h_a$

$$h_a(x) = \arctan\left(x \cdot e^{a \cdot x}\right)$$

$$h'_a(x) = \frac{1}{1 + \left(x \cdot e^{a \cdot x}\right)^2} \cdot \left(e^{a \cdot x} + a \cdot x \cdot e^{a \cdot x}\right) = \frac{(1 + a \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}}{1 + x^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot x}} = f_a(x)$$

$$F_a(x) = \int_0^x \frac{(1 + a \cdot t) \cdot e^{a \cdot t}}{1 + t^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot t}} \, dt \qquad F_a(x) = \arctan\left(x \cdot e^{a \cdot x}\right) - \arctan(0) = h_a(x)$$

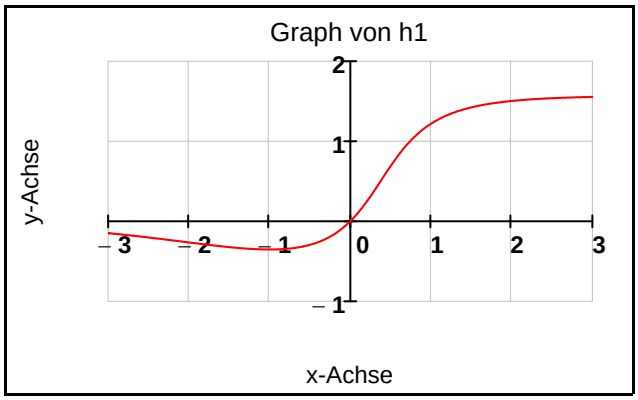
Teilaufgabe 1.5 (7 BE)

Geben Sie für $F_1 = h_1$ die Nullstelle und für den Graphen von F_1 die Koordinaten und Art des Extrempunkts an. Zeichnen Sie den Graphen von F_1 im Bereich $-3 \le x \le 3$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse ($1 \cdot LE = 2 \cdot cm$).

$$h_1(x) := \operatorname{atan}\left(x \cdot e^x\right)$$

$h_1(x) = 0$ Nullstelle: $x_0 = 0$

Tiefpunkt: $x_T = -1$ $h_1(-1) \to -\operatorname{atan}\left(e^{-1}\right) = -0.353$



Teilaufgabe 1.6 (3 BE)

Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} F_1(x)$.

Welcher Flächeninhalt lässt sich mithilfe dieses Grenzwertes angeben?

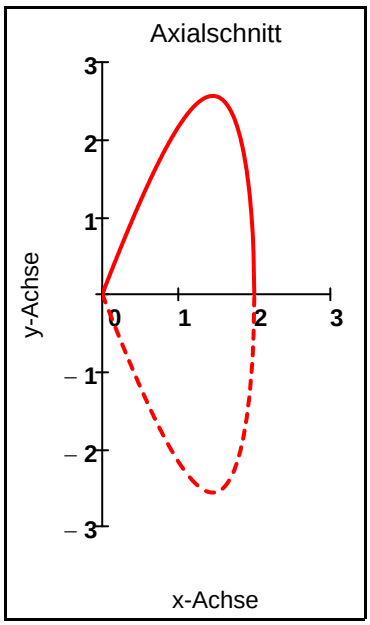
$$\lim_{x \to \infty} F_1(x) = \lim_{x \to \infty} \operatorname{atan}\left(x \cdot e^x\right) \overset{\infty}{\uparrow} = \frac{\pi}{2}$$

Der Graph von f_1 und die x-Achse begrenzen im 1. Quadranten des Koordinantensystems eine Fläche, die sich nach rechts ins Unendliche erstreckt. die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche beträgt $\frac{\pi}{2}$.

Teilaufgabe 2 (6 BE)

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) := x \cdot \sqrt{e^2 - e^x}$ mit $x \in [0\,;\,2]$.
Aus einem hinreichend dicken Holzstück wird ein Körper gedrechselt, dessen Längsschnitt von dem Graphen von g und dessen Spiegelbild bezüglich der x-Achse begrenzt wird.
Berechnen Sie die Maßzahl V des Volumeninhalts.

$x1 := 0, 0.01 .. 2$



$$V = \pi \cdot \int_0^2 (g(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^2 x^2\left(e^2 - e^x\right)dx$$

$$V = \pi \cdot \left(\int_0^2 e^2 \cdot x^2\,dx - \int_0^2 x^2 \cdot e^x\,dx\right)$$

Nebenrechnung:

$$\int x^2 \cdot e^x\,dx = x^2 \cdot e^x - \int 2 \cdot x \cdot e^x\,dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + \int 2 \cdot e^x\,dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x$$

$u(x) = x^2$	$u'(x) = 2 \cdot x$	$u(x) = 2 \cdot x$	$u'(x) = 2$
$v'(x) = e^x$	$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$	$v(x) = e^x$

$$V = \pi \cdot \left[e^2 \cdot \frac{2^3}{3} - \left(2^2 \cdot e^2 - 2 \cdot 2 \cdot e^2 + 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0\right)\right] = \pi \cdot \left[\frac{8}{3} \cdot e^2 - \left(2 \cdot e^2 - 2\right)\right] = \pi \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot e^2\right)$$

Teilaufgabe 3
In der folgenden Aufgabe soll die Differentialgleichung für die Teilchenzahl n(t) der Tochtersubstanz eines radioaktiven Mutter-Tochter-Zerfalls untersucht werden. Von der radioaktiven Muttersubstanz mit der Zerfallskonstanten $\lambda_M > 0$ liegen zur Zeit t = 0 N_0 Atome vor.

Die ebenfalls radioaktive Tochtersubstanz zerfällt mit der Zerfallskonstanten $\lambda_T = 0$.

Für die Teilchenzahl $n(t)$ der Tochtersubstanz gilt für $t \geq 0$ folgende Differntialgleichung:

$n'(t) = \lambda_M \cdot e^{-\lambda_M \cdot t} - \lambda_T \cdot n(t)$.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)
Bestimmen Sie die Lösung n(t) für $\lambda_M = \lambda_T = \lambda$ mithilfe der Variation der Konstanten, wenn gilt:

$n(t) = 0$.

Gegebene inhomogene DGL: $n' = \lambda_M \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t} - \lambda_T \cdot n$

Mit $\lambda_M = \lambda_T = \lambda$: $\Rightarrow$ $n' = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - \lambda \cdot n$

Inhomogene DGL: $n' + \lambda \cdot n = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Homogene DGL: $n' + \lambda \cdot n = 0$

Differentialquotient: $\frac{dn}{dt} = -\lambda \cdot n$

Trennen der Variablen: $\frac{dn}{n} = -\lambda \cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{n}\, dn = \int -\lambda\, dt + k \rightarrow \ln(|n|) = k - \lambda \cdot t$

Da $n > 0$ $n = e^{-\lambda \cdot t + k}$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems: $n_H(t) = K \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Variation der Konstanten: $n_S(t) = K(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Ableitungsfunktion: $n'_S(t) = K'(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} + K(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot (-\lambda)$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $n' + \lambda \cdot n = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$$K'(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} + K(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot (-\lambda) + \lambda \cdot \left(K(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t}\right) = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow K'(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$\Rightarrow \qquad K'(t) = N_0 \cdot \lambda$

$\Rightarrow \qquad K(t) := \int N_0 \cdot \lambda \, dt$

Integration: $K(t) = N_0 \cdot \lambda \cdot t$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$n_A(t) = K \cdot e^{-\lambda \cdot t} + N_0 \cdot \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Bestimmung von K durch Einsetzen der Anfangsbedingung: $n_A(0, K) = 0$

$K := K \qquad K \cdot e^0 + N_0 \cdot \lambda \cdot 0 \cdot e^0 = 0 \text{ auflösen}, K \rightarrow 0$

Partikuläre Lösung: $n_P(t) = N_0 \cdot \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Teilaufgabe 3.2 (8 BE)
Lösen Sie nun obige Differentialgleichung für n(t) für $\lambda_M \neq \lambda_T$, wenn ebenfalls gilt: $n(t) = 0$.

[Ergebnis: $n(t) = \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(e^{-\lambda_M \cdot t} - e^{-\lambda_T \cdot t} \right)$]

$\lambda_T \neq \lambda_M$

Gegebene inhomogene DGL: $n' = \lambda_M \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t} - \lambda_T \cdot n$

Homogene DGL: $n' + \lambda_T \cdot n = 0$

Differentialquotient: $\frac{dn}{dt} = -\lambda_T \cdot n$

Trennen der Variablen: $\frac{dn}{n} = -\lambda_T \cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{n} \, dn = \int -\lambda_T \, dt + k \rightarrow \ln(|n|) = k - t \cdot \lambda_T$

Da $n > 0$ $\qquad n = e^{-\lambda_T \cdot t + k}$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems: $n_H(t) = K \cdot e^{-\lambda_T \cdot t}$

Variation der Konstanten: $n_S(t) = K(t) \cdot e^{-\lambda_T \cdot t}$

Ableitungsfunktion: $n'_S(t) = K'(t) \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} + K(t) \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} \cdot (-\lambda_T)$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $n' + \lambda_T \cdot n = \lambda_M \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t}$

$$K'(t) \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} + K(t) \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} \cdot (-\lambda_T) + \lambda_T \cdot \left(K(t) \cdot e^{-\lambda_T \cdot t}\right) = \lambda_M \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t}$$

Vereinfacht und aufgelöst:

$$K'(t) \cdot e^{-t \cdot \lambda_T} = N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{-t \cdot \lambda_M} \text{ auflösen}, K'(t) \rightarrow N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{t \cdot \lambda_T} \cdot e^{-t \cdot \lambda_M}$$

$$\Rightarrow \quad K'(t) = N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{t \cdot (\lambda_T - \lambda_M)}$$

$$\Rightarrow \quad K(t) = \int N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{t \cdot (\lambda_T - \lambda_M)} \, dt$$

Integration: $$\int N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{t \cdot (\lambda_T - \lambda_M)} \, dt = \frac{N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{t \cdot (\lambda_T - \lambda_M)}}{\lambda_T - \lambda_M}$$

$$K(t) = \frac{N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{t \cdot (\lambda_T - \lambda_M)}}{\lambda_T - \lambda_M}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$n_A(t) = K \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} + \left[\frac{N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{t \cdot (\lambda_T - \lambda_M)}}{\lambda_T - \lambda_M}\right] \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} = K \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} + \left[\frac{N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{t \cdot (-\lambda_M)}}{\lambda_T - \lambda_M}\right]$$

$$n_A(t) = K \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} + \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t}$$

Bestimmung von K durch Einsetzen der Anfangsbedingung: $n_A(0, K) = 0$

$$K := K \qquad K \cdot e^0 + \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot e^0 = 0 \text{ auflösen}, K \rightarrow -\frac{N_0 \cdot \lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M}$$

Partikuläre Lösung: $n(t) = -\frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} + \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t}$

$$n(t) = \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(-e^{-\lambda_T \cdot t} + e^{-\lambda_M \cdot t} \right)$$

Teilaufgabe 3.3 (8 BE)
Begründen Sie für den Fall $\lambda_M \neq \lambda_T$ in Abhängigleit von λ_M und λ_T ohne Verwendung von $n'(t)$, dass $n(t)$ ein absolutes Maximum besitzt.
Berechnen Sie nun den Zeitpunkt t_{max} mithilfe von $n'(t)$.

Definitionsmenge von n(t): $t \in [0 ; \infty[$

linker Randwert: $n(0) = 0$

$$\begin{matrix} & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow \end{matrix}$$

rechter Randwert: $\lim\limits_{t \to \infty} \left[\frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(-e^{-\lambda_T \cdot t} + e^{-\lambda_M \cdot t} \right) \right] = 0$

Funktion ist stetig und besitzt auf dem linken Rand sowie auf dem rechten Rand den Funktionswert Null, d. h. es muss ein absolutes Maximum geben.

Ableitungsfunktion: $n'(t) = \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(\lambda_T \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} - \lambda_M \cdot e^{-\lambda_M \cdot t} \right)$

Horizontale Tangenten: $n'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_T \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} - \lambda_M \cdot e^{-\lambda_M \cdot t} = 0$$

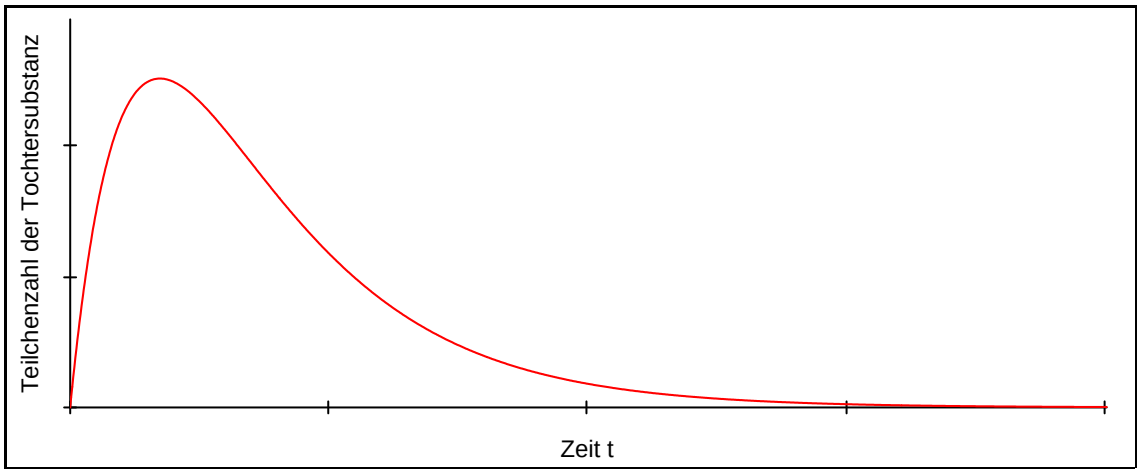
$$\Leftrightarrow \quad \lambda_T \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} = \lambda_M \cdot e^{-\lambda_M \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_T}{\lambda_M} = \frac{e^{-\lambda_M \cdot t}}{e^{-\lambda_T \cdot t}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_T}{\lambda_M} = e^{\lambda_T \cdot t - \lambda_M \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_T \cdot t - \lambda_M \cdot t = \ln\left(\frac{\lambda_T}{\lambda_M}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(\lambda_T - \lambda_M\right) \cdot t = \ln\left(\frac{\lambda_T}{\lambda_M}\right)$$

$$t_{max} = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_T}{\lambda_M}\right)}{\lambda_T - \lambda_M}$$

Modellfunktion zu: $n(t) := \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(-e^{-\lambda_T \cdot t} + e^{-\lambda_M \cdot t}\right)$