Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2008

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

Ein Autoteilezulieferer stellt für eine Autofirma ein aufwändiges elektronisches Bauteil her. Langfristig stellt man fest, dass 8% der Bauteile fehlerhaft sind. Interpretieren Sie diese relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauteil fehlerhaft ist.

Teilaufgabe 1.0
In einem Karton befinden sich 50 Bauteile, von denen genau vier fehlerhaft sind.

Teilaufgabe 1.1 **(5 BE)**
Jemand nimmt aus dem Karton zufällig fünf Bauteile. Berechnen Sie, mit welchen Wahrscheinlichkeiten folgende Ereignisse eintreten.
A: *Unter den herausgenommenen Bauteilen befinden sich genau zwei fehlerhafte.*
B: *Unter den herausgenommenen Bauteilen befindet sich mindestens ein fehlerhaftes.*

$$P(A) = P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{46}{3}}{\binom{50}{5}} = \frac{6\cdot 15180}{2118760} = 0.04299$$

$\text{combin}(4,2) = 6$ $\qquad$ $\text{combin}(46,3) = 15180$ $\qquad$ $\text{combin}(50,5) = 2118760$

$$P(B) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{46}{5}}{\binom{50}{5}} = 1 - \frac{1\cdot 1370754}{2118760} = 0.35304$$

$\text{combin}(4,0) = 1$ $\qquad$ $\text{combin}(46,5) = 1370754$ $\qquad$ $\text{combin}(50,5) = 2118760$

Teilaufgabe 1.2 **(2 BE)**
Die 50 Bauteile werden aus dem Karton genommen und nebeneinander gelegt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen die vier fehlerhaften Bauteile genau nebeneinander

4 Stück, 46 Stück $\qquad$ 46 Stück, 4 Stück

$f, f, f, f, x, x, x, \ldots, x$ $\qquad$ . . . $\qquad$ $x, x, x, \ldots, x, f, f, f, f$ $\qquad$ 47 Möglichkeiten

$$P_4 = \frac{47}{\binom{50}{4}} = \frac{47}{230300} = 0.000204$$

$\text{combin}(50,4) = 230300$

Teilaufgabe 2.0
Zur Auslieferung der Bauteile an die Autofirma werden jeweils 8 Kartons mit 50 Bauteilen auf eine Palette gepackt.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich auf einer Palette mindestens 30 fehlerhafte Bauteile befinden.

X: Anzahl der defekten Bauteile auf einer Palette, Binomialverteilung mit $n = 8 \cdot 50 = 400$, $p = 0.08$.

$\mu := 400 \cdot 0.08 = 32$ $\qquad \sigma := \sqrt{400 \cdot 0.08 \cdot 0.92} = 5.426$

$$P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 29) = 1 - \Phi\left(\frac{29 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(-0.461) = 1 - (1 - \Phi(0.461))$$

$\text{pnorm}(0.461, 0, 1) = 0.6776$ $\qquad \ldots = \Phi(0.461) = 0.6776$

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einem Karton mindestens drei fehlerhafte Bauteile sind, sowie die Wahrscheinlichkeit, dass auf einer Palette in mindestens einem Karton wenigstens drei fehlerhafte Bauteile sind.

Y: Anzahl der defekten Bauteile in einem Karton, Binomialverteilung mit $n = 50$, $p = 0.08$.

nicht im Tafelwerk

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \left[\binom{50}{0} \cdot 0.08^0 \cdot 0.92^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0.08^1 \cdot 0.92^{49} + \binom{50}{2} \cdot 0.08^2 \cdot 0.92^{48}\right]$$

Nebenrechnungen:

$\text{combin}(50, 0) \cdot \left(0.08^0 \cdot 0.92^{50}\right) = 0.01547$

$\text{combin}(50, 1) \cdot \left(0.08^1 \cdot 0.92^{49}\right) = 0.06725$

$\text{combin}(50, 2) \cdot \left(0.08^2 \cdot 0.92^{48}\right) = 0.14326$

$P(Y \geq 3) = 1 - (0.01547 + 0.06725 + 0.14326) = 0.77403$

oder direkt mit Mathcad: $\quad 1 - \text{pbinom}(2, 50, 0.08) = 0.77403$

Z: Anzahl der Kartons mit mindestens drei defekten Bauteilen auf einer Palette, Binomialverteilung mit $n = 8$, $p = 0.77403$.

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \binom{8}{0} \cdot 0.77403^0 \cdot (1 - 0.77403)^8 = 0.99999$$

$1 - \text{combin}(8, 0) \cdot 0.77403^0 \cdot (1 - 0.77403)^8 = 0.99999$

oder direkt mit Mathcad: $\quad 1 - \text{pbinom}(0, 8, 0.77403) = 0.99999$

Teilaufgabe 3 (8 BE)
Berechnen Sie, wie viele Bauteile aus der laufenden Produktion man mindestens überprüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mehr als fünf fehlerhafte Bauteile zu finden.

X: Anzahl der defekten Bauteile unter n überprüften Bauteilen, Binomialverteilung mit $p = 0.08$.

$$P(X > 5) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 5) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 5) \leq 0.05$$

$$\mu(n) := n \cdot 0.08 \qquad \sigma(n) := \sqrt{n \cdot 0.08 \cdot 0.92} = \sqrt{0.0736 \cdot n}$$

$$\Phi\left(\frac{5 - \mu(n) + 0.5}{\sigma(n)}\right) \leq 0.05$$

$$\frac{5 - \mu(n) + 0.5}{\sigma(n)} \leq -1.645 \rightarrow \frac{-0.08 \cdot n + 5.5}{\sqrt{0.0736 \cdot n}} \leq -1.645 \;\left|\; \begin{matrix} \text{auflösen}, n \\ \text{Gleitkommazahl}, 4 \end{matrix} \right. \rightarrow 133.1 \leq n < \infty$$

aufrunden: $n = 134$

Man muss mindestens 134 Bauteile der laufenden Produktion überprüfen.

Teilaufgabe 4.0
Die Autofirma behauptet, dass die Fehlerquote bei den Bauteilen 8% überschritten hat (Gegenhypothese). Um dies in einem Signifikanztest zu überprüfen, werden der Produktuon 200 Bauteile entnommen und untersucht. Es wird ein Signifikanztest von 10% vereinbart.

Teilaufgabe 4.1 (6 BE)
Ermitteln Sie, für welche Anzahlen von fehlerhaften Teilen man sich nicht für die gestiegene Fehlerquote entsprechend der Behauptung der Autofirma entscheidet.
[Ergebnis: $A = \{ 0, 1, ..., 21 \}$]

Testgröße: Anzahl X der instabilen Betriebssysteme unter $n := 200$. $\qquad p := 0.08$

H_0: $\quad p_0 \leq p \rightarrow p_0 \leq 0.08 \qquad$ H_1: $\quad p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.08$

Testart: Rechtsseitiger Signifikanztest

$$A = \{ 0, 1, ..., k \} \qquad \overline{A} = \{ k + 1, k + 2, ..., 200 \}$$

$$\mu_0 := n \cdot p = 16 \qquad \sigma_0 := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 3.837$$

$$P(\overline{A}) \leq 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \geq k + 1) \leq 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq k) \leq 0.1$$

$$\Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \geq 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - \mu_0 + 0.5}{\sigma_0}\right) \geq 0.9$$

TW Seite 52 $\quad \dfrac{k-\mu_0+0.5}{\sigma_0} \geq 1.281 \;\left|\; \begin{array}{l}\text{auflösen}, k\\ \text{Gleitkommazahl}, 4\end{array}\right. \rightarrow 20.41 \leq k < \infty$

aufrunden: $\quad k = 21$

$A = \{\ 0, 1, ..., 21\ \}$ $\qquad\qquad \overline{A} = \{\ 22, 23, ..., 200\ \}$

Falls man unter 200 überprüften Bauteilen höchstens 21 defekte Bauteile findet, entscheidet man sich entgegen der Behauptung der Autofirma.

Teilaufgabe 4.2 **(2 BE)**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem Annahmebereich aus 4.1 nicht bemerkt wird, wenn die Fehlerquote bei der Produktion auf 15% ansteigt.

$$F(A) = P(X \leq 21) = \sum_{i=0}^{21} B(200, 0.15, i) = 0.0415$$ TW Seite 14

$\text{pbinom}(21, 200, 0.15) = 0.0415$

Teilaufgabe 5.0
Um die Fehlerquote zu senken, soll die Produktion der Bauteile zukünftig mit einer neuen Fertigungsstraße erfolgen. Die neue Fertigungsstraße kann 70% der Produktion übernehmen, die Fehlerquote beträgt zwei Prozent. Die vebleibenden 30% werden nach wie vor mit der alten Fertigungsstraße mit der Fehlerquote von 8% hergetellt.

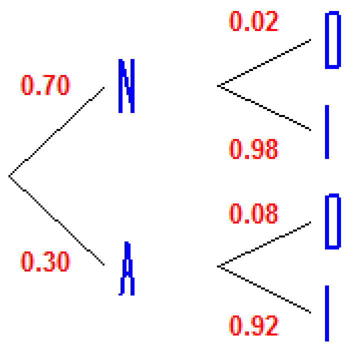
Teilaufgabe 5.1 **(4 BE)**
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Bauteil der Gesamtproduktion fehlerhaft ist.

A: Das Bauteil stammt von der alten Fertigungsanlage.

N: Das Bauteil stammt von der neuen Fertigungsanlage.

D: Das Bauteil ist defekt.

N: Das Bauteil ist nicht defekt.



$P(D) = P(N \cap D) + P(A \cap D)$

$P(D) = 0.7 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.08 = 0.038$

Teilaufgabe 5.2 (2 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fehlerhaftes Teil von der neuen Fertigungs-straße stammt.

$$P_D(N) = \frac{P(N \cap D)}{P(D)} = \frac{0.7 \cdot 0.02}{0.038} = 0.368$$