Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2008

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

Der Support für ein älteres Betriebssystem eines Softwareentwicklers läuft in Kürze aus. Deshalb wird es in einem Fachgeschäft als Sonderangebot verkauft.

Teilaufgabe 1 (6 BE)
60% der Kunden, die das Fachgeschäft besuchen, kaufen das Betriebssystem, 10% dieser Kunden erwerben auch noch das zugehörige Officepaket. 8% aller Kunden kaufen nur das Officepaket. Interpretieren Sie die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit,
a) dass ein zufällig ausgewählter Kunde ein Officepaket erwirbt.
b) dass ein Kunde, der kein Betriebssystem kauft, ein Officepaket erwirbt.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse
A: *Ein Kunde kauft ein Betriebssystem* und
B: *Ein Kunde kauft ein Officepakete*
stochastisch unabhängig sind.

A: Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft das Betriebssystem

B: Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft das Officepaket

$P(A) = 0.60 \qquad P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.10 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0.60 \cdot 0.10 = 0.06$

$P(\overline{A} \cap B) = 0.08$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & A & \overline{A} & \blacksquare \\ B & 0.06 & 0.08 & 0.14 \\ \overline{B} & 0.54 & 0.32 & 0.86 \\ \blacksquare & 0.60 & 0.40 & 1 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe a) $P(B) = 0.14$

Teilaufgabe b) $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0.08}{0.40} = 0.20$

$P(A) \cdot P(B) = 0.60 \cdot 0.14 = 0.084$ ungleich $P(A \cap B) = 0.06$

$\Rightarrow$ A und B sind stochastisch abhängig

Teilaufgabe 2
Ein Großhändler kauft in sehr großen Mengen Datenträger ein, weil er Käufern des Betriebssystems ein Paket von Datenträgern kostenlos dazugeben will. Er weiß, dass aufgrund schlechter Qualität des Trägermaterials 5% der Datenträger unbrauchbar sind.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
F: *Erst der fünfte entnommene Datenträger ist unbrauchbar.*
D: *Frühestens der dritte entnommene Datenträger ist unbrauchbar.*
S: *Spätestens der fünfte entnommene Datenträger ist unbrauchbar.*

$p_{unbrauchbar} = 0.05$ $\qquad$ $p_{brauchbar} = 0.95$

$$P(F) = 0.95^4 \cdot 0.05 = 0.041$$

D: Die beiden ersten Datenträger sind brauchbar.

$$P(D) = 0.95^2 = 0.903$$

$\overline{S}$: Die ersten fünf Datenträger sind brauchbar.

$$P(S) = 1 - P(\overline{S}) = 1 - 0.95^5 \cdot 0.226$$

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der zehnte entnommene Datenträger der dritte unbrauchbare ist.

C: Unter den ersten neun Datenträgern sind zwei unbrauchbare und der zehnte ist auch unbrauchbar.

TW Seite 12

$$P_C = \binom{9}{2} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^7 \cdot 0.05 = 0.06285 \cdot 0.05 = 0.00314$$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Berechnen Sie die Anzahl der Datenträger, die ein Kunde mindestens erhalten muss, um mit mehr als 99% Wahrscheinlichkeit mindestens einen unbrauchbaren Datenträger zu bekommen.

X: Anzahl der Datenträger aus n gewählten

$$P(X \geq 1) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) < 0.01$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^n < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad 0.95^n < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.95)}$$

$n > 89.781$ $\qquad$ $n = 90$

Der Kunde muss mindestens 90 datenträger erhalten.

Teilaufgabe 2.4 (3 BE)
Ein guter Kunde erhält 200 Datenträger. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon 12 oder mehr Datenträger unbrauchbar sind.

TW Seite 14

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - \sum_{i=0}^{11} B(200, 0.05, i) = 1 - 0.69976 = 0.30024$$

Teilaufgabe 3
Das Betriebssystem gilt als sehr zuverlässig. Diese Behauptung soll durch eine Umfrage in einem Forum im Internet überprüft werde, an der 2000 Mitglieder des Forums, die das Bereibssystem installiert haben, teilnehmen.

Teilaufgabe 3.1 (8 BE)
Nach Aussage des Softwarentwicklers läuft höchstens 1% aller installierten Betriebssysteme instabil (Nullhypothese). Die Nullhypothese soll beibehalten werden, wenn höchstens 27 der Mitglieder des Forums über ein instabiles System klagen. Berechnen Sie das Risiko, mit dieser Entscheidungsregel die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen, sowie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn 2% der installierten Betriebssysteme instabil sind.

Testgröße: Anzahl X der instabilen Betriebssysteme unter $n := 2000$. $p := 0.01$

H_0: $p_0 \le p \rightarrow p_0 \le 0.01$ H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.01$

Testart: Rechtseitiger Signifikanztest

$A = \{ 0, 1, ..., 27 \}$ $\overline{A} = \{ 28, 29, ..., 2000 \}$

$\mu_0 := n \cdot p = 20$ $\sigma_0 := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4.45$

Fehler 1. Art:

TW Seite 51

$$P(\overline{A}) = P(X \ge 28) = 1 - P(X \le 27) = 1 - \Phi\left(\frac{27 - \mu_0 + 0.5}{\sigma_0}\right) = 1 - \Phi(1.69) = 1 - 0.95449 = 0.04551$$

Fehler 2. Art:

$\mu_1 := n \cdot 0.02 = 40$ $\sigma_1 := \sqrt{n \cdot 0.02 \cdot 0.98} = 6.261$

$$P(A) = P(X \le 27) = \Phi\left(\frac{27 - \mu_1 + 0.5}{\sigma_1}\right) = \Phi(-1.996) = 1 - \Phi(1.996) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.977 = 0.023$$

Teilaufgabe 3.2 (7 BE)
Kurz nach dem Ende des Supports für das Betreibssystem häufen sich im Internet die Beschwerden. Auf Nachfrage gibt der Softwareentwickler die Verschlechterung zu, behauptet aber, dass höchstens 4% aller installierten Systeme instabil laufen (Nullhypothese).
Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel für 2000 Befagte so, dass das Risiko, die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen, höchstens 5% beträgt.

Testgröße: Anzahl X der instabilen Betriebssysteme unter $n := 2000$. $p := 0.04$

H_0: $p_0 \le p \rightarrow p_0 \le 0.04$ H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.04$

Testart: Rechtseitiger Signifikanztest

$A = \{ 0, 1, ..., k \}$ $\overline{A} = \{ k + 1, k + 2, ..., 500 \}$

$P(X \geq k+1) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq k) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \geq 0.95$

$\mu_0 := n \cdot p = 80 \qquad \sigma_0 := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 8.764$

$$\Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \geq 0.95 \quad \overset{\text{TW}}{\Rightarrow} \quad \frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \geq 1.645$$

Auflösen: $k_1 := 1.645 \cdot \sigma_0 + \mu_0 - 0.5 \qquad k_1 = 93.916$ Aufrunden: $k_1 = 94$

$A = \{\, 0, 1, \ldots, 94 \,\} \qquad \overline{A} = \{\, 95, 96, \ldots, 2000 \,\}$

Teilaufgabe 4 (6 BE)
Die Wahrscheinlichkeit für ein instabiles Betriebssystem beträgt 4%. Es werden 2000 Forumsmitglieder bezüglich der Instabilität befragt. Berechnen Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% die Anzahl der instabilen Betriebssysteme liegt. Verwenden Sie dabei die Normalverteilung als Näherung.

$P\left(\left|X - \mu_0\right| \leq c\right) \geq 0.50 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\mu_0 - c \leq X \leq \mu_0 + c\right) \geq 0.50$

$\Leftrightarrow \quad P\left(X \leq \mu_0 + c\right) - P\left(X \leq \mu_0 - c - 1\right) \geq 0.50$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\mu_0 + c - \mu_0 + 0.5}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 + c - 1 - \mu_0 + 0.5}{\sigma_0}\right) \geq 0.50$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(\frac{-c - 0.5}{\sigma_0}\right) \geq 0.50$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma_0}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma_0}\right)\right) \geq 0.50$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma_0}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma_0}\right)\right) \geq 0.50$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma_0}\right) \geq 1.50$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma_0}\right) \geq 0.75 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c + 0.5}{\sigma_0} \geq 0.674 \ \left| \begin{array}{l} \textbf{auflösen}, c \\ \textbf{Gleitkommazahl}, 4 \end{array} \right. \rightarrow 5.407 \leq c < \infty$$

$c := 6 \qquad \mu_0 - c = 74 \qquad \mu_0 + c = 86$

Intervall: $[\, 74 \,;\, 86 \,]$