# Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2006

## • Mathematik 13 Technik - A I - Lösung

**Teilaufgabe 1.0**

Gegeben ist die Funktion $f_a$ mit $f_a(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$ mit $a \in IR^+$ in der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq IR$.

**Teilaufgabe 1.1 (8 BE)**

Bestimmen Sie $D_f$ in Abhängigkeit von a sowie die Nullstellen von $f_a$.

Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von $f_a$ und das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to 0$.

$$a^2 - x^2 \geq 0 \left| \begin{array}{l} \text{annehmen}, a > 0 \\ \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, x \neq 0 \end{array} \right. \rightarrow 0 < x \leq a \vee -a \leq x < 0$$

Defintionsmenge: $D_{f_a} = [\, -a \,;\, 0 \,[ \;\cup\; ]\, 0 \,;\, a \,]$

Nullstellen: $a^2 - x^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$ $\qquad x_1 = -a \qquad x_2 = a$

Symmetrieverhalten:

$$f_a(-x) = \arctan\left[\frac{\sqrt{a^2 - (-x)^2}}{-x}\right] = -\arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) = -f_a(x)$$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0^-} \left( \frac{\overset{\overset{a>0}{\uparrow}}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{\underset{\underset{0^-}{\downarrow}}{x}} \right) \text{ annehmen}, a > 0 \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \arctan\left( \underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}} \right) \text{ annehmen}, a > 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0^+} \left( \frac{\overset{\overset{a>0}{\uparrow}}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{x}} \right) \text{ annehmen}, a > 0 \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \arctan\left( \underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}} \right) \text{ annehmen}, a > 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

**Teilaufgabe 1.2** **(11 BE)**
Ermitteln Sie $f'_a(x)$, das Monotonieverhalten des Graphen von $f_a$ und das Verhalten von $f'_a(x)$ für $x \to \pm a$ und $x \to 0$. Geben Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von $f_a$ an.

$$f'_a(x) = \frac{1}{1+\frac{a^2-x^2}{x^2}} \cdot \frac{\frac{-2\cdot x}{2\cdot\sqrt{a^2-x^2}}\cdot x - \sqrt{a^2-x^2}\cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x^2+a^2-x^2}\cdot\frac{-x^2-\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$f'_a(x) = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$f'_a(x) < 0$ für alle $x \in D_{f_a}$

$G_{f_a}$ streng monoton fallend in $]\,-\infty\,;\,0\,[$ und in $]\,0\,;\,\infty\,[$.

$$\lim_{x \to a^-} \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ annehmen}, a > 0 \ \to -\infty$$

$$\lim_{x \to -a^+} \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ annehmen}, a > 0 \ \to -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ annehmen}, a > 0 \ \to -\frac{1}{a}$$

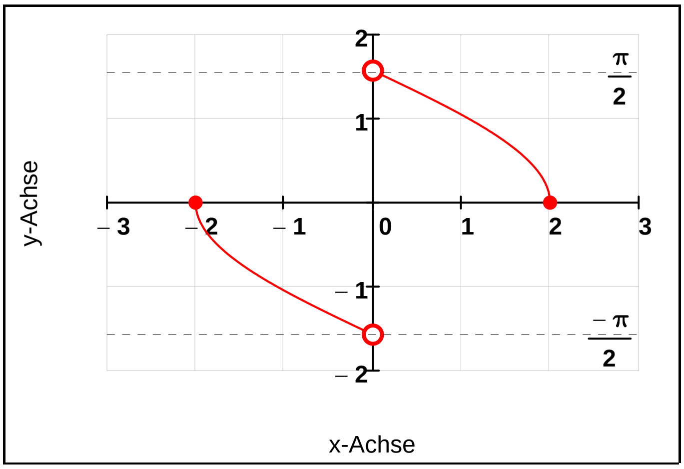
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ annehmen}, a > 0 \ \to -\frac{1}{a}$$

Extempunkte auf dem Rand: **HP $(-a\,/\,0)$** **TP $(a\,/\,0)$**

**Teilaufgabe 1.3 (4 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen von $f_2$. (Längeneinheit 2 cm)

Bezeichnung: $f_2(x) = f(x)$

$$f(x) := \arctan\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right)$$




**Teilaufgabe 1.4.1 (7 BE)**
Bestimmen Sie die reellen Konstanten b und c so, dass die in $D_{h_a} = D_{f_a} \cup \{0\}$ definierte Funktion $h_a$ mit
$$h_a(x) = \begin{cases} f_a(x) + c & \text{if } -a \le x < 0 \\ b & \text{if } x = 0 \\ f_a(x) & \text{if } 0 < x \le a \end{cases}$$
an der Stelle $x = 0$ stetig ist. Überprüfen Sie, ob für diese Werte von b und c die Funktion an dieser Stelle auch differenzierbar ist.

$$h_1(x, a, c) := \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) + c \qquad (\blacksquare) = b$$

linksseitige Nahtstelle:

$$\lim_{x \to 0^-}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) + c\right) = \frac{-\pi}{2} + c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-\pi}{2} + c = b \qquad (1)$$

rechtsseitige Nahtstelle:

$$\lim_{x \to 0^+} \left( \arctan\left( \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) \right) = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{2} = b \qquad (2)$$

(2) in (1) $\qquad c = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$$\lim_{x \to 0^-} h'_a(x) = \lim_{x \to 0^-} f'_a(x) = \frac{-1}{a} \qquad \text{(nach 1.2)}$$

$\Rightarrow$ Also ist $h_a$ differenzierbar.

$$\lim_{x \to 0^+} h'_a(x) = \lim_{x \to 0^+} f'_a(x) = \frac{-1}{a} \qquad \text{(nach 1.2)}$$

**Teilaufgabe 1.4.2 (4 BE)**

Zeigen Sie, dass gilt: $h_a(x) = \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$.

$$k_a(x) = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \qquad k'_a(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{-a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$h'_a(x) = f'_a(x) = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad k_a(x) = h_a(x) + C$$

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad h_a(0) = \frac{\pi}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad h_a(x) = \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$$

**Teilaufgabe 1.4.3 (6 BE)**

Der Graph von $h_a$ und die beiden Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche im I. Quadranten. Bestimmen Sie die Maßzahl A des Inhalts dieser Fläche in Abhängigkeit von a.

$$A = \int_0^a \arccos\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

Stammfunktion: $H_a(x) = \int \arccos\left(\frac{x}{a}\right) dx$

$u(x) = \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$ $\qquad u'(x) = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$v'(x) = 1$ $\qquad v(x) = x$

$$H_a(x) = x \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \int \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \blacksquare$$

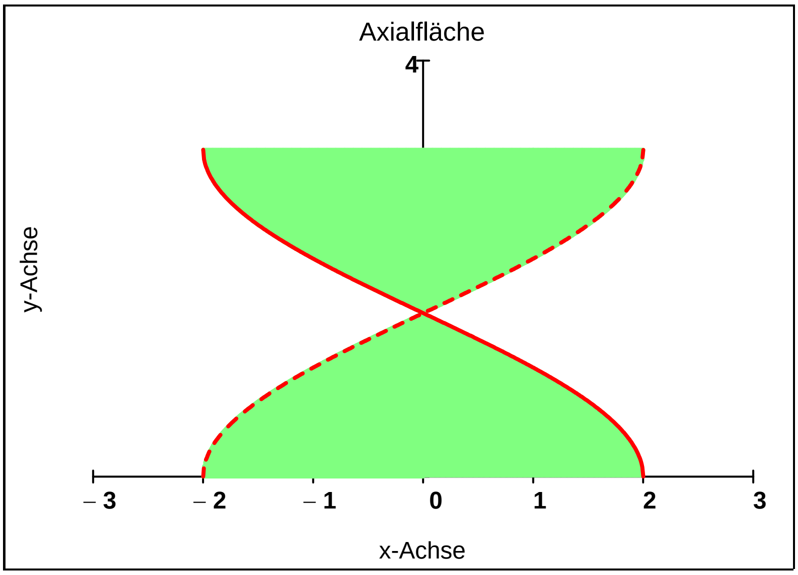
$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{z}} dz = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{-1}{2} + 1} \cdot z^{-\frac{1}{2}+1} = -z^{0.5} = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

Substitution: $z = a^2 - x^2$ $\qquad \frac{dz}{dx} = -2 \cdot x$ $\qquad dx = -\frac{dz}{2 \cdot x}$

$$H_a(x) = x \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$A = H_a(a) - H_a(0) = a \cdot \arccos(1) - \sqrt{a^2 - a^2} + \sqrt{a^2} = a$$

**Teilaufgabe 1.4.4 (6 BE)**
Rotiert der Graph von $h_a$ um die y-Achse, so beschreibt er die Mantelfläche eines sanduhrförmigen Körpers. Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers .
[ Ergebnis: $V = 0.5 \cdot a^2 \cdot \pi^2$ ]




Funktion $h_a$:

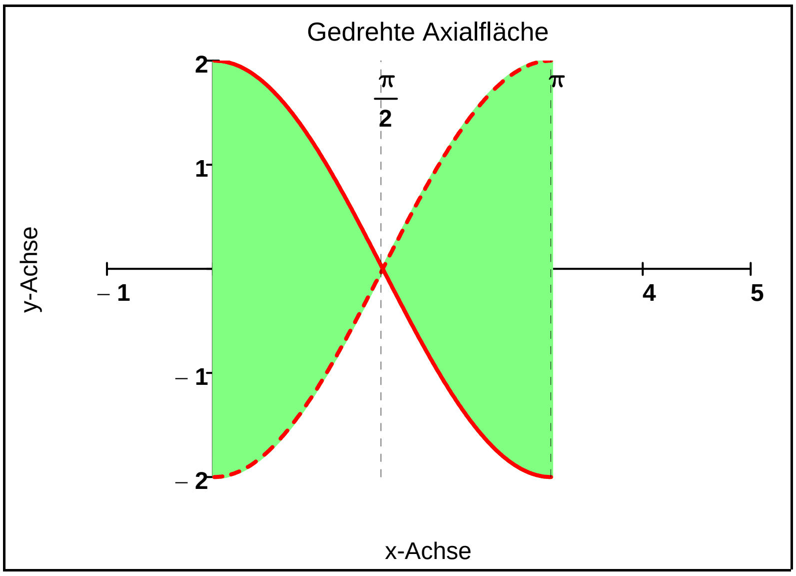
$$y = \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$$

Vertauschung der Variablen:

$$x = \arccos\left(\frac{y}{a}\right)$$

Auflösen nach y

$$\cos(x) = \frac{y}{a}$$




Umkehrfunktion u

$$u_a(x) = a \cdot \cos(x)$$

Volumen:

$$V = \pi \cdot \int_0^{\pi} \left(u_a(x)\right)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_0^{\pi} a^2 \cdot (\cos(x))^2 dx$$

$$\int (\cos(x))^2 dx = \int \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2 \cdot x))\, dx = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot \frac{1}{2}$$

$$V = \pi \cdot a^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi) \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \sin(0) \cdot \frac{1}{2}\right)\right] = \pi \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$V = \frac{a^2 \cdot \pi^2}{2}$$

**Teilaufgabe 1.4.5 (3 BE)**
Die GULDIN'sche Regel lautet: Das Volumen $V\_$ eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt A des sich drehenden Flächenstücks und dem Weg seines Schwerpunkts. Mit der y-Achse als Drehachse gilt: $V\_ = A\cdot 2\cdot x_S\cdot\pi$. Berechnen Sie die x-Koordinate $x_S$ des Schwerpunktes der in 1.4.3 beschriebenen Fläche.

$$V\_ = A\cdot 2\cdot x_S\cdot\pi \quad\Rightarrow\quad x_S = \frac{V\_}{2\cdot A\cdot\pi} \qquad V\_ = \frac{1}{2}\cdot V = \frac{a^2\cdot\pi^2}{4}$$

$$A = a\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = a\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right) = a$$

einsetzen: $$x_S = \frac{\frac{a^2\cdot\pi^2}{4}}{2\cdot a\cdot\pi} = \frac{a\cdot\pi}{8} = 0.393\cdot a$$

**Teilaufgabe 2.0**
Die Geschwindigkeit v(t) eines Körpers im freien Fall mit turbulenter Luftreibung kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden: $\frac{c^2}{g}\cdot v' = c^2 - v^2$.
Dabei ist g die konstante Fallbeschleunigung und c eine Konstante, die von der Masse und der Form der Körpers sowie von der Dichte der Luft abhängt, c und g sind positiv.

**Teilaufgabe 2.1 (8 BE)**
Bestimmen Sie den Funktionsterm v(t) für $t \geq 0$ unter der Voraussetzung $v(0) = 0$.
Dabei darf vorausgesetzt werden, dass stets gilt: $0 \leq v < c$.

[ Ergebnis: $v(t) = c\cdot\frac{e^{\frac{2\cdot g}{c}\cdot t} - 1}{e^{\frac{2\cdot g}{c}\cdot t} + 1}$ ]

Gegeben ist die DGL: $$\frac{c^2}{g}\cdot v' = c^2 - v^2$$

Differentialquotient: $$\frac{dv}{dt} = \frac{c^2 - v^2}{c^2}\cdot g$$

Trennen der Variablen: $$\frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2}\cdot dt$$

Integration: $$\int \frac{1}{c^2 - v^2}\, dv = \int \frac{g}{c^2}\, dt$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{c^2 - v^2} = \frac{A}{c+v} + \frac{B}{c-v} = \frac{A\cdot(c-v) + B\cdot(c+v)}{(c+v)\cdot(c-v)} = \frac{(A+B)\cdot c + (B-A)\cdot v}{(c+v)\cdot(c-v)}$$

Koeffizientenvergleich: $(A+B)\cdot c = 1$

$$B - A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = B$$

$$\Rightarrow \qquad 2\cdot A\cdot c = 1 \text{ auflösen}, A \ \rightarrow \frac{1}{2\cdot c} \qquad A = \frac{1}{2\cdot c} \qquad B = \frac{1}{2\cdot c}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int \frac{\frac{1}{2\cdot c}}{c+v} + \frac{\frac{1}{2\cdot c}}{c-v}\, dv = \int \frac{g}{c^2}\, dt$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int \frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v}\, dv = \int \frac{2\cdot g}{c}\, dt + k \rightarrow \ln(c+v) - \ln(c-v) = \frac{c\cdot k + 2\cdot g\cdot t}{c}$$

$$\ln\left(\frac{c+v}{c-v}\right) = \frac{2\cdot g\cdot t}{c} + k$$

Delogarithmieren: $$\frac{c+v}{c-v} = e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k} \qquad \Leftrightarrow \qquad c + v = (c-v)\cdot e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k}$$

Auflösen nach v: $$\left(1 + e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k}\right)\cdot v = c\cdot e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k} - c$$

$$v = \frac{c \cdot e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}+k} - c}{1 + e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}+k}} = \frac{\left(e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}+k} - 1\right) \cdot c}{1 + e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}+k}}$$

Allgemeine Lösung: $v(t) = \dfrac{\left(K e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}} - 1\right) \cdot c}{1 + K \cdot e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}}}$

Anfangsbedingung einsetzen: $v(0) = 0$

$$\frac{\left(K e^{0} - 1\right) \cdot c}{1 + K \cdot e^{0}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(K e^{0} - 1\right) \cdot c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K e^{0} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K = 1$$

Partikuläre Lösung: $v(t) = \dfrac{\left(e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}} - 1\right) \cdot c}{1 + e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}}}$

**Teilaufgabe 2.2** **(3 BE)**
Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ und schließen Sie daraus auf die physikalische Bedeutung der Konstanten c.

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\left(\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}}} - 1\right) \cdot c}{1 + \underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}}}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\left(\frac{2 \cdot g}{c} \cdot e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}}\right) \cdot c}{\left(\frac{2 \cdot g}{c} \cdot e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}}\right)} = \lim_{t \to \infty} (c) = c$$

Die Endgeschwindigkeit, die der Körper erreichen kann, ist fast c (Lichtgeschwindigkeit).