

Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2009

• Mathematik 13 Technik - A I - Lösung

**Teilaufgabe 1.0**

Gegeben ist die reelle Funktion f in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \frac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Bestimmen Sie D_f und die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

Bedingung: $x^2 - 2x + 2 > 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0$ auflösen $\rightarrow \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ besitzt keine Nullstellen $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $S_y (0 / \frac{\sqrt{2}}{2})$

$|x - 1| = 0$ auflösen, $x \rightarrow 1$ $S_x (1 / 0)$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Zeigen Sie dass der Graph von f symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 1$ ist, und bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow \pm \infty$ und die Gleichung der Asymptote.

Koordinatentransformation: $x = u + 1$ $y = v$

$$f(u) = \frac{|u + 1 - 1|}{\sqrt{(u + 1)^2 - 2 \cdot (u + 1) + 2}} = \frac{|u|}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$f(-u) = \frac{|-u|}{\sqrt{(-u)^2 + 1}} = \frac{|u|}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$\Rightarrow f(-u) = f(u)$ also achsensymmetrisch.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left| x \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right|}{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left| x \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right|}{|x| \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}} = 1$$

$\begin{matrix} 0 \\ \uparrow \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$

Wegen Symmetrie:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \rightarrow 1$$

waagrechte Asymptote: $y = 1$

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)

Bestimmen Sie $f'(x)$, das Monotonieverhalten von f und das Verhalten von $f'(x)$ für $x \rightarrow 1$ sowie die Art und Koordinaten des Extrempunkts des Graphen von f .

[Teilergebnis: $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)^{-1.5}$ für $x > 1$]

Betragsfrei schreiben:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} & \text{if } x \geq 1 \\ \frac{-x+1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} & \text{if } x < 1 \end{cases}$$

$$f_1'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x-1) \cdot \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}}}{x^2 - 2x + 2} = \frac{(x^2 - 2x + 2) - (x-1) \cdot (x-1)}{(x^2 - 2x + 2) \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$f_1'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - 1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 2)^3}}$$

$$f_2'(x) = \frac{(-1) \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2} - (-x+1) \cdot \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}}}{x^2 - 2x + 2} = \frac{-(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \cdot (x-1)}{(x^2 - 2x + 2) \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$f_2'(x) = \frac{-x^2 + 2 \cdot x - 2 + x^2 - 2 \cdot x + 1}{\sqrt{(x^2 - 2 \cdot x + 2)^3}} = \frac{-1}{\sqrt{(x^2 - 2 \cdot x + 2)^3}}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2 \cdot x + 2)^3}} & \text{if } x > 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{(x^2 - 2 \cdot x + 2)^3}} & \text{if } x < 1 \end{cases}$$

$f'(x) > 0$ für $x > 1 \Rightarrow G_f$ streng monoton steigend für $x \in [1; \infty[$

$f'(x) < 0$ für $x < 1 \Rightarrow G_f$ streng monoton fallend für $x \in]-\infty; 1]$

$f(1) = 0$ Tiefpunkt: TP(1/0)

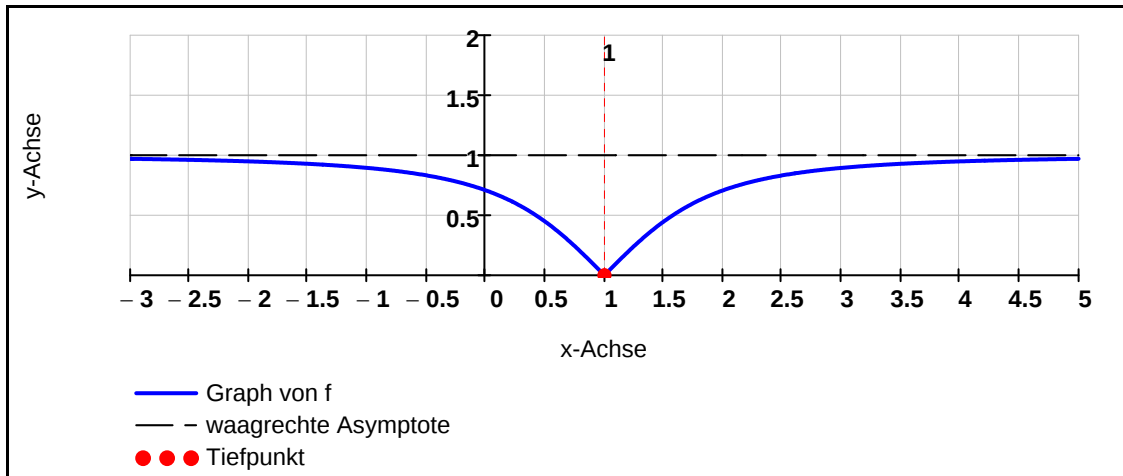
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2 \cdot x + 2)^3}} \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{\sqrt{(x^2 - 2 \cdot x + 2)^3}} \rightarrow -1$$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie für $-2 \leq x \leq 4$ den Graphen der Funktion f in ein kartesisches Koordinatensystem.

[1 LE = 2 cm]


Teilaufgabe 1.5 (7 BE)

Die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ und der Graph von f schließen eine Fläche ein. Rotiert diese Fläche um die x -Achse, so entsteht ein rotationssymmetrischer Körper.

Berechnen Sie die Maßzahl V seines Volumeninhalts.

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left[1^2 - (f_1(x))^2 \right] dx = 2 \cdot \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left[1^2 - \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \right)^2 \right] dx$$

Nebenrechnung:

NR 1

$$\int \left[1 - \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \right)^2 \right] dx = \int \left[1 - \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 2} \right] dx = \int \left[1 - \left(1 - \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \right) \right] dx$$

NR 1: Polynomdivision mit Rest:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 2} \text{ parfrac } \rightarrow 1 - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

$$\blacksquare = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$$

NR 2: quadratische Ergänzung:

NR 2

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 1 + 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx = \arctan(x-1)$$

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(b-1) - \arctan(0)) = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi^2$$

Teilaufgabe 1.6.0

Gegeben sind nun die reellen Funktionen g und h mit $D_g = D_h = \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \arccos(f(x)) \text{ und } h(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{|x-1|}\right) & \text{if } x \neq 1 \\ 0.5 \cdot \pi & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

Teilaufgabe 1.6.1 (14 BE)

Zeigen Sie, dass g keine Nullstellen besitzt. Ermitteln Sie $g'(x)$ und zeigen Sie, dass gilt: $g = h$.

$$[\text{Teilergebnis: } g'(x) = \frac{-1}{x^2 - 2x + 2} \text{ für } x > 1]$$

$$\arccos(x) = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow 1 \quad W_f = [0; 1[$$

$$g(x) = \arccos(f(x)) \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \notin W_f$$

$$\Rightarrow \text{keine Lösung in } D_f$$

für $x > 1$

$$g_1'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 2)^3}} = \frac{-\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{(x^2 - 2x + 2) \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$g_1'(x) = \frac{-1}{x^2 - 2x + 2}$$

$$g_2'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (f(x))^2}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{(x^2 - 2 \cdot x + 2)^3}} = \frac{1}{x^2 - 2 \cdot x + 2}$$

für $x > 1$

$$h_1(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad h_1'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{(x-1)^2}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x^2 - 2 \cdot x + 2}$$

für $x < 1$

$$h_2(x) = \arctan\left(\frac{-1}{x-1}\right) \quad h_2'(x) = \frac{-1}{1 + \frac{1}{(x-1)^2}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x^2 - 2 \cdot x + 2}$$

also gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $g'(x) = h'(x)$

$$g(x) = h(x) + c$$

$$g(x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2 \cdot x + 2}}\right) & \text{if } x \geq 1 \\ \arccos\left(\frac{-x+1}{\sqrt{x^2 - 2 \cdot x + 2}}\right) & \text{if } x < 1 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{if } x > 1 \\ 0.5 \cdot \pi & \text{if } x = 1 \\ \arctan\left(\frac{-1}{x-1}\right) & \text{if } x < 1 \end{cases}$$

1. Fall: $x < 1$

$$g(0) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$h(0) = \arctan(1) + c = \frac{\pi}{4} + c \Rightarrow c = 0$$

2. Fall: $x > 1$

$$g(2) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$h(2) = \arctan(2) + c = \frac{\pi}{4} + c \Rightarrow c = 0$$

3. Fall: $x = 1$ $g(1) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} = h(1)$

Teilaufgabe 1.6.2 (10 BE)

Bestimmen Sie für die Funktion H mit $H(x) = \int_1^x h(t) dt$, $x > 1$ eine integralfreie Darstellung.

(Hinweis: Beginnen Sie mit der Substitution $z = t - 1$ bzw. $z = x - 1$.)

$$H(x) = \int_1^x h(t) dt = \lim_{b \rightarrow 1^+} \int_b^x \arctan\left(\frac{1}{t-1}\right) dt$$

$$\int \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) dx = \int \arctan\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

Substitution: $z = t - 1$ $\frac{dz}{dt} = 1$ $dt = dz$

Partielle Integration:

$$u(z) = \arctan\left(\frac{1}{z}\right) \quad u'(z) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{z}\right)^2} \cdot \frac{-1}{z^2} = \frac{-1}{z^2 + 1}$$

$$v'(z) = 1 \quad v(z) = z$$

$$\int \arctan\left(\frac{1}{z}\right) dz = z \cdot \arctan\left(\frac{1}{z}\right) - \int \frac{-z}{z^2 + 1} dz = z \cdot \arctan\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot z}{z^2 + 1} dz$$

$$\blacksquare = z \cdot \arctan\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(z^2 + 1)$$

Resubstitution:

$$\blacksquare = (t-1) \cdot \arctan\left(\frac{1}{t-1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln[(t-1)^2 + 1] = (t-1) \cdot \arctan\left(\frac{1}{t-1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(t^2 - 2t + 2)$$

Nebenrechnung

$$\lim_{b \rightarrow 1^+} \left[(b-1) \cdot \arctan\left(\frac{1}{b-1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(b^2 - 2b + 2) \right] = 0 + \frac{1}{2} \ln(1) = 0$$

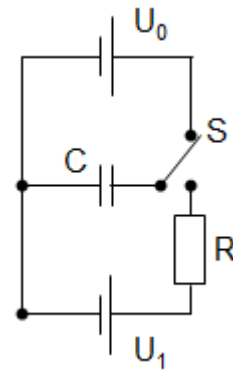
$$H(x) = (x-1) \cdot \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - \dots$$

Teilaufgabe 2 (8 BE)

Ein Kondensator mit der Kapazität C wird an der Gleichspannungsquelle der Spannung U_0 aufgeladen. Für die Beträge U_0 und U_1 der Spannungen gilt: $U_1 < U_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S umgelegt, sodass sich der Kondensator der Kapazität C über den ohmschen Widerstand R entladen kann. Während des Entladevorgangs gilt für den Betrag $U = U(t)$ der Spannung am Kondensator die Differentialgleichung $U'(t) = a \cdot (U_1 - U(t))$ mit

$$U'(t) = \frac{dU(t)}{dt} \text{ und } a = \frac{1}{R \cdot C}.$$

Berechnen Sie die spezielle Lösung $U(t)$ der obigen Differentialgleichung, falls zum Zeitpunkt $t = 0$ für die Spannung am Kondensator gilt: $U(0) = 3 \cdot U_1$



$$U' = -a \cdot (U - U_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dU}{dt} = -a \cdot (U - U_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{U - U_1} = -a \cdot dt$$

$$\text{Integration:} \quad \int \frac{1}{U - U_1} dy = \int -a dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(|U - U_1|) = -a \cdot t + k$$

$$\text{Auflösen:} \quad |U - U_1| = e^{-a \cdot t + k} = K \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \quad U(t) = U_1 + K \cdot e^{-a \cdot t} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

$$U(0) = 3 \cdot U_1$$

$$\text{einsetzen} \quad U(0) = U_1 + K \cdot e^0 = 3 \cdot U_1$$

$$U_1 + K = 3 \cdot U_1 \text{ auflösen, } K \rightarrow 2 \cdot U_1$$

$$U(t) = U_1 + 2 \cdot U_1 \cdot e^{-a \cdot t} = U_1 (1 + 2 \cdot e^{-a \cdot t})$$