Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2009

- **Mathematik 13 Technik - A II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = 2 \cdot e^{-x} \cdot \sqrt{e^x - a}$ mit $a \in IR^+$ in der von a abhängigen maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq IR$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Bestimmen Sie D_{f_a} und eventuelle Nullstellen von f_a jeweils in Abhängigkeit von a.

[Teilergebnis: $D_{f_a} = [\ \ln(a)\ ;\ \infty\ [$]

$$e^x - a \geq 0 \ \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a > 0 \end{array} \right. \rightarrow \ln(a) \leq x \qquad \Rightarrow \qquad D_{f_a} = [\ \ln(a)\ ;\ \infty\ [$$

Nullstelle: $x_0 = \ln(a)$

Teilaufgabe 1.2 (10 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_a in Abhängigkeit von a und ermitteln sie Art und Koordinaten eventuell vorhandener Extemalpunkte des Graphen von f_a.

[Mögliches Teilgebnis: $f'_a(x) = \dfrac{2 \cdot a - e^x}{e^x \cdot \sqrt{e^x - a}}$]

$$f'_a(x) = -2 \cdot e^{-x} \cdot \sqrt{e^x - a} + 2 \cdot e^{-x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{\sqrt{e^x - a}} = \frac{-2 \cdot \sqrt{e^x - a}}{e^x} + \frac{1}{\sqrt{e^x - a}}$$

$$f'_a(x) = \frac{-2 \cdot \left(e^x - a\right) + e^x}{e^x \cdot \sqrt{e^x - a}} = \frac{2 \cdot a - e^x}{e^x \cdot \sqrt{e^x - a}}$$

Waagrechte Tangenten:

$$2 \cdot a - e^x = 0 \ \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a > 0 \end{array} \right. \rightarrow \ln(2 \cdot a)$$

	$x = \ln(a)$		$x = \ln(2\cdot a)$	
$f'_a(x)$	nicht def.	pos		neg
G_f	nicht def.	sms		smf
	TP		HP	

$$f(\ln(2\cdot a), a) \rightarrow a^{\frac{-1}{2}}$$

G_f ist streng monoton steigend in $[\ln(a)\,;\ \ln(2\cdot a)\,]$ und streng monoton fallend in $[\ln(2\cdot a)\,;\ \infty[$.

Tiefpunkt auf dem Rand: $(\ \ln(a) /\ 0\ )$

Hochpunkt: $\left(\ \ln(2 + a) /\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ \right)$

Teilaufgabe 1.3 **(6 BE)**
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $x \rightarrow \infty$ sowie das Verhalten von $f'_a(x)$ für $x \rightarrow \ln(a)$.

L'Hosp.

$$\lim_{x \to \infty} \left(2\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{e^x - a}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{2\cdot\sqrt{e^x - a}}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^x}}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{2}{2}\cdot\frac{e^x}{\sqrt{e^x - a}}}{e^x}\right)$$

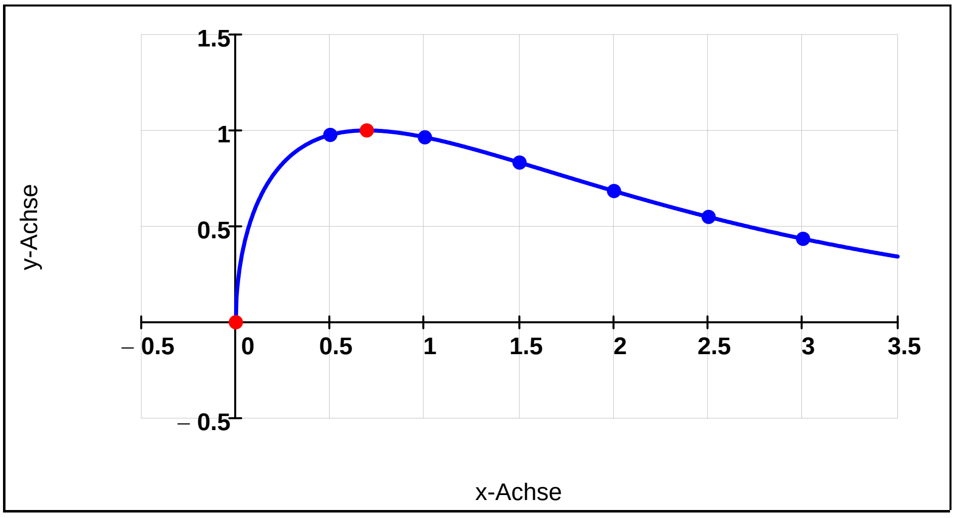
$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{\sqrt{e^x - a}}}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to \ln(a)^+} \frac{\overset{\overset{a > 0}{\uparrow}}{2\cdot a - e^x}}{\underset{\underset{a > 0}{\downarrow}}{e^x}\cdot\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\sqrt{e^x - a}}} \quad \text{annehmen}, a > 0 \ \rightarrow \infty$$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Zeichnen Sie mithilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse und weiterer Funktionswerte den Graphen der Funktion f_1 ($a = 1$) für $0 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 2 cm).

$f_1(x) := f(x,1) = 2 \cdot e^{-x} \cdot \sqrt{e^x - 1}$ $\qquad$ $x_d := 0.5, 1 .. 3$

$x_d =$	$f_1(x_d) =$
0.5	0.98
1	0.96
1.5	0.83
2	0.68
2.5	0.55
3	0.44



Teilaufgabe 1.5

Die Integralfunktion von f_1 ist gegeben durch $F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$ mit $D_F = \mathbb{R}_0^+$.

Teilaufgabe 1.5.1 (10 BE)
berechnen Sie eine integalfreie Darstellung des Funktionsterms $F(x)$ und untersuchen Sie die Funktion F auf Nullstellen.
Hinweis: Beginnen Sie mit einer partiellen Integration und führen Sie dann eine geeignete Substitution durch.

[Teilergebnis: $\int f_1(x)\,dx = -f_1(x) + 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$]

Stammfunktion von: $J1(x) = \int 2\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{e^x - 1}\,dx$

$u(x) = \sqrt{e^x - 1}$ $\qquad u'(x) = \dfrac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x - 1}}$

$v'(x) = 2\cdot e^{-x}$ $\qquad v(x) = -2\cdot e^{-x}$

$$J1(x) = -2\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{e^x - 1} - \int \frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x - 1}}\cdot\left(-2\cdot e^{-x}\right) dx = -2\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{e^x - 1} + \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx$$

Stammfunktion von: $J2(x) = \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx$

Substitution: $z(x) = \sqrt{e^x - 1}$ $\qquad z^2 = e^x - 1$ $\qquad e^x = z^2 + 1$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e^x}{2\cdot\sqrt{e^x - 1}} \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{2\cdot\sqrt{e^x - 1}}{e^x}\cdot dz$$

$$J2(x) = \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{e^x - 1}}{e^x}\,dz = \int \frac{2}{z^2 + 1}\,dz = 2\cdot\arctan(z) = 2\cdot\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right)$$

einsetzen in $J1(x)$: $J1(x) = -2\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{e^x - 1} + 2\cdot\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right)$

Integralfunktion:

$$F(x) = -2\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{e^x - 1} + 2\cdot\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \left(\underbrace{-2\cdot e^0\cdot\sqrt{e^0 - 1}}_{=0} + \underbrace{2\cdot\arctan\left(\sqrt{e^0 - 1}\right)}_{=0}\right)$$

$$F(x) = -2\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{e^x - 1} + 2\cdot\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right)$$

1. Nullstelle: $F(0) = \int_0^0 f_1(t)\,dt = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 = 0$

$F'(x) = f_1(x)$ $\qquad f_1(x) > 0$

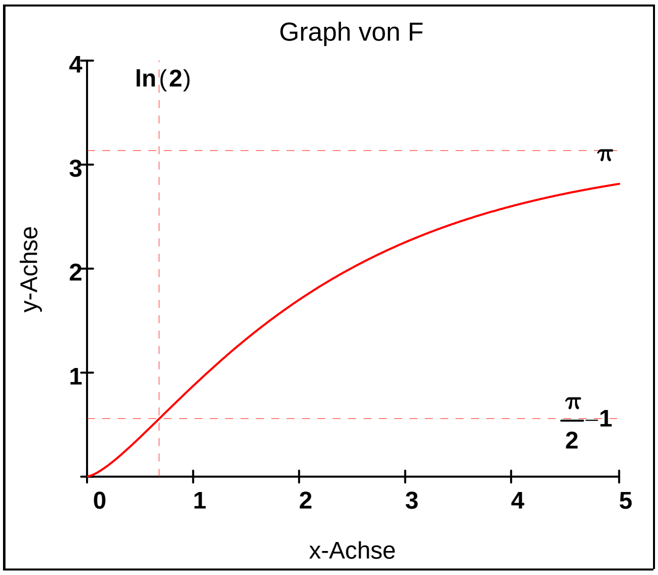
Teilaufgabe 1.5.2 (4 BE)
Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von F.

$F''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 0 \qquad x_W = \ln(2)$

$$F(\ln(2)) = -2 \cdot e^{-\ln(2)} \cdot \sqrt{e^{\ln(2)} - 1} + 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{e^{\ln(2)} - 1}\right) = \frac{-2}{2} \cdot 1 + 2 \cdot \arctan(1) = -1 + 2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$F(\ln(2)) = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$F(x) := -2 \cdot e^{-x} \cdot \sqrt{e^x - 1} + 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\sqrt{e^x - 1}\right) \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) \to \pi$$



Teilaufgabe 1.5.3 (5 BE)
Der Graph von f_1 und die x-Achse begrenzen eine Fläche, die sich nach rechts ins Unendliche erstreckt. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts.

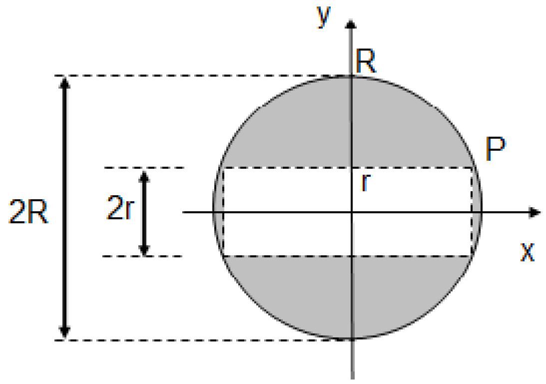
$$A = \lim_{b \to \infty} \int_0^b f_1(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} F(b) = \lim_{b \to \infty} \left(-2 \cdot \underbrace{e^{-b} \cdot \sqrt{e^b - 1}}_{\to 0} + 2 \cdot \arctan\left(\underbrace{\sqrt{e^b - 1}}_{\to \infty}\right)\right)$$

$$A = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

↑ nach 1.3

Teilaufgabe 2 (8 BE)
Eine Kugel mit dem Radius R wird mit einem zylindrischen Bohrer mit dem Radius r zentral durchbohrt. Zeigen Sie mithilfe der Integralrechnung, dass für die Maßzahl V des Volumeninhalts der durchbohrten Kugel gilt: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R - r)^{1.5}$

Hinweis: In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Koordinaten der Punkte einer Kreislinie mit dem Radius R und mit dem Ursprung als Mittelpunkt die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$.
Berechnen Sie damit zuerst die Koordnaten des Punktes P (siehe Skizze).



Oberer Halbkreis: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

Punkt P: $y_P = r$

Bedingung: $\sqrt{R^2 - x^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad R^2 - x^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = R^2 - r^2 \qquad x_P = \sqrt{R^2 - r^2}$

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{x_P} y^2 \, dx - V_{Zyl} = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{x_P} \left(R^2 - x^2\right) dx - r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot x_P$$

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \left(R^2 \cdot x_P - \frac{1}{3} \cdot x_P^{\,3} - 0\right) - r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot x_P$$

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \left[R^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{1}{3} \cdot \left(R^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{R^2 - r^2}\right] - r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \left(R^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}\right)$$

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot R^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}\right)$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \left(R^2 - r^2\right) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right)^{1.5}$$

Teilaufgabe 3 (10 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten.

$$x \cdot y' - 3 \cdot y' + y = \frac{x-3}{x^2+1} \quad \text{für } x > 3.$$

Inhomogene Differentialgleichung:

$$(x-3) \cdot y' + y = \frac{x-3}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{y}{x-3} = \frac{1}{x^2+1}$$

Homogene DGL: $y' + \frac{y}{x-3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{-y}{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x-3}$

Triviale Lösung: $y = 0$

Trennen der Variablen: $\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{-1}{x-3}\, dx$ mit $y \neq 0$

$$\ln(|y|) = -\ln(x-3) + k$$

$$\ln(|y|) = \ln\left(\frac{1}{x-3}\right) + k$$

Delogarithmieren: $|y| = e^{\ln\left(\frac{1}{x-3}\right)+k} = \frac{1}{x-3} \cdot e^k$ mit $e^k = K \wedge K > 0$

Betrag auflösen: $y_h(x) = K \cdot \frac{1}{x-3}$ mit $K \in \mathbb{R}$, triviale Lösung enthalten

Variation der Konstanten: $y_p(x) = K(x) \cdot \frac{1}{x-3}$

Ableitung: $y'_p(x) = K'(x) \cdot \frac{1}{x-3} + K(x) \cdot \frac{-1}{(x-3)^2}$

Einsetzen in inhomogene DGL: $y' + \frac{y}{x-3} = \frac{1}{x^2+1}$

$$K'(x) \cdot \frac{1}{x-3} + K(x) \cdot \frac{-1}{(x-3)^2} + \frac{K(x)}{(x-3)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

Vereinfachen: $K'(x) = \dfrac{x-3}{x^2+1} = \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{3}{x^2+1}$

$$K(x) = \int \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - 3\cdot\arctan(x)$$

Spezielle Lösung des inhomogenen Systems:

einsetzen: $y_p(x) = \left(\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - 3\cdot\arctan(x)\right)\cdot\dfrac{1}{x-3}$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$y_A(x) = y_h(x) + y_p(x) = K(x)\cdot\frac{1}{x-3} + \left(\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - 3\cdot\arctan(x)\right)\cdot\frac{1}{x-3}$$