Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2009

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
In einer Fabrik werden Handy-Gehäuse in zwei Schichten produziert. 65% der Produktion stammen aus der Frühschicht. Von diesen sind 10% fehlerhaft. 8,5% der Gesamtproduktion sind fehlerhafte Handy-Gehäuse der Spätschicht. Interpretieren Sie diese relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Erstellen Sie eine geeignete Vierfeldertafel und ermitteln Sie den Anteil der fehlerhaften Handy-Gehäuse von der Gesamtproduktion.
[Ergebnis: 15%]

Frühschicht: **(F)** $P(F) = 0.65$ $\Rightarrow$ Spätschicht: $(\overline{F})$ $P(\overline{F}) = 0.35$

Fehlerhaft = defekt (D): $P_F(D) = 0.10$ $P(D \cap \overline{F}) = 0.085$

Es gilt: $P_F(D) = \dfrac{P(D \cap F)}{P(F)}$ $\Rightarrow$ $P(D \cap F) = P_F(D) \cdot P(F) = 0.10 \cdot 0.65 = 0.065$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & F & \overline{F} & \blacksquare \\ D & 0.065 & 0.085 & 0.15 \\ \overline{D} & 0.585 & 0.265 & 0.85 \\ \blacksquare & 0.65 & 0.35 & 1 \end{pmatrix}$$

Fehlerhafte Handys der Gesamtproduktion:

$P(D) = 0.065 + 0.085 = 0.15$

$0.65 - 0.065 = 0.585$

$0.85 - 0.585 = 0.265$

Teilaufgabe 1.2 (2 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein von der Spätschicht gefertigtes Gehäuse einwandfrei ist.

$$P_{\overline{F}}(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{0.265}{0.35} = 0.757$$

Teilaufgabe 1.3 (2 BE)
Untersuchen Sie, ob die Fehlerhaftigkeit des Gehäuses stochastisch unabhängig ist von der Produktion in Früh- oder Spätschicht.

$P(D) = 0.15$ $P(F) = 0.65$ $P(D) \cdot P(F) = 0.15 \cdot 0.65 = 0.0975$

$P(D \cap F) = 0.065$ $\Rightarrow$ $P(D) \cdot P(F) \neq P(D \cap F)$

die Ereignisse D und F sind stochastisch abhängig

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Der Gesamtproduktion werden 600 Handy-Gehäuse entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr fehlerhafte Exemplare in dieser Stichprobe sind als man erwartet.

X: Anzahl der defekten Handy-Gehäuse $\quad n := 600 \quad p := 0.15$

$\mu := n \cdot p = 90 \qquad \sigma := \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = 8.746$

$$P(X > 90) = 1 - P(X \leq 90) = 1 - \Phi\left(\frac{90 - 90 + 0.5}{8.746}\right) = 1 - \Phi(0.057) = 1 - 0.52392 = 0.476$$

Teilaufgabe 2
Trotz des Verbots von eingeschalteten Handys im Unterricht hat jeder fünftzehnte Schüler sein Handy auch während des Unterichts eingeschaltet. In einer Schule wird eine Kontrolle des *Handy-Verbots* durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit für ein eingeschaltetes Handy wird mit $\frac{1}{15}$ angenommen.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Ermitteln Sie, wie viele Schüler mindestens kontrolliert werden müssen, damit mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Schüler mit eingeschaltetem Handy erwischt wird.

$$P(X \geq 1) \geq 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 9) \leq 0.10$$

$$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^0 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^n \leq 0.10 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{14}{15}\right)^n \leq 0.10 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln\left(\frac{14}{15}\right) \leq \ln(0.10)$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0.10)}{\ln\left(\frac{14}{15}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 33.374$$

aufrunden: $\quad n \geq \mathrm{ceil}(33.374) \rightarrow n \geq 34$

Es müssen mindestens 34 Handys kontrolliert werden.

Teilaufgabe 2.2 (8 BE)
Es werden nacheinander 30 Schüler komtrolliert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: *Es werden genau drei Schüler mit eingeschaltetem Handy erwischt und diese direkt nacheinander.*
B: *Es werden mindestens zwei eingeschaltete Handys gefunden.*
C: *Der zehnte Schüler ist der vierte mit eingeschaltetem Handy.*

Anordnungen:

3 e, 27 x	1 x, 3 e, 26 x	usw.	27 x, 3 e
e e e x x x x ... x	x e e e x x x x ... x		x x x x ... x e e e

insgesamt 28 Möglichkeiten.

$$P(A) = 28\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^3\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^{27} = 0.00129$$

$$P(B) = P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$P(B) = 1 - \left[\binom{30}{0}\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^0\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^{30} + \binom{30}{1}\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^1\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^{29}\right] \qquad P(B) = 0.603$$

NR: $$1 - \left[\text{combin}(30,0)\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^0\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^{30} + \text{combin}(30,1)\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^1\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^{29}\right] = 0.603$$

9 Schüler — der 10. Schüler

$$P(C) = \underbrace{\binom{9}{3}\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^3\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^6}_{\text{9 Schüler}}\cdot\underbrace{\frac{1}{15}}_{\text{der 10. Schüler}} \qquad P(C) = 0.011$$

NR: $$\text{combin}(9,3)\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^3\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^6\cdot\frac{1}{15} = 0.0011$$

Teilaufgabe 3 (6 BE)
Ein Jugendmagazin hat eine Auflage von 7500 Stück. Der neuesten Ausgabe liegt ein Fragebogen zum Handykonsum bei. Für die Rücksendung des ausgefüllten Fragebogens bedankt sich der Verlag mit einem Handyanhänger. Erfahrungsgemäß senden 10% der Leser einen ausgefüllten Fragebogen zurück. Bestimmen Sie die Anzahl der Handyanhänger, die der Verlag mindestens vorrätig haben sollte, damit bei ausverkaufter Auflage die Anzahl der Handyanhänger mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit ausreicht.

X: Anzahl der Rücksender des Fragebogens unter $n := 7500$ verteilten Fragebogen mit $p := 0.10$

$$\mu := n\cdot p = 750 \qquad \sigma := \sqrt{\mu\cdot(1-p)} = 25.981$$

$$P(X \le k) \ge 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k-\mu+0.5}{\sigma}\right) \ge 0.99$$

TW: $$\frac{k-\mu+0.5}{\sigma} \ge 2.326 \text{ auflösen}, k \;\rightarrow\; 809.93125267607813016 \le k < \infty$$

aufrunden: $k \ge 810$

Es müssen mindestens 810 Handyanhänger vorrätig sein.

Teilaufgabe 4.0
Eine ältere Studie besagt, dass 65% aller Jugendlichen mit Handy eine Prepaid-Karte nutzen. Ein namhaftes Jugendmagazin ist der Meinung, dass sich dieser Anteil der Prepaid-Kartennutzer verändert hat. Es gibt deswegen einen Test in Auftrag, bei dem 500 Jugendliche mit Handy befragt werden.

Teilaufgabe 4.1 (9 BE)
Entwickeln Sie einen geeigneten (zweiseitigen) Test zur Überprüfung der Aussage der Studie und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich auf dem 5%-Signifikanzniveau. Dabei soll der Annahmebereich symmetrisch zum Erwartungswert sein.

Testgröße: Anzahl von"X" bei $n := 500$

Testart: Zweiseitiger Signifikanztest; $p := 0.65$

Nullhypothese H_0: $p_0 = p \rightarrow p_0 = 0.65$

Gegenhypothese H_1: $p_1 \neq p \rightarrow p_1 \neq 0.65$

Signifikanzniveau: $\alpha_S := 5\%$

Annahmebereich: $A = \{ k_1 + 1, k_1 + 2, \ldots, k_2 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 0, 1, 2, \ldots, k_1 \} \cup \{ k_2 + 1, k_2 + 2, \ldots, n \}$

<u>Lösung mit Tafelwerk:</u>

Linker Ablehungsbereich:

$$P\left(\overline{A_1}\right) \leq 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X \leq k_1\right) \leq 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.025$$

$\mu := n \cdot p \qquad \mu = 325 \qquad \sigma := \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} \qquad \sigma = 10.665$

Tafelwerk: $\dfrac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma} \leq -1.96$

$k_1 \leq -1.96 \cdot 10.665 + 325 - 0.5 \rightarrow k_1 \leq 303.5966$ Abrunden: $k_1 = 303$

$325 - 304 = 21$

$325 + 21 = 346$

Annahmebereich: $A = \{304, \ldots, 346\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 0, 1, \ldots, 303\} \cup \{ 347, 348, \ldots, 500 \}$

Lösung mit Mathcad: $n := 500$ $p := 0.65$ $\alpha_S := 0.05$

$\mu_0 := n \cdot p$ $\mu_0 = 325$ $\sigma_0 := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ $\sigma_0 = 10.665$

Ansatz linker Ablehnungsbereich: $\Phi\left(\frac{k - \mu_0 + 0.5}{\sigma_0}\right) \le \frac{\alpha_S}{2}$ diskrete Verteilung

↓

Inverse kumulative Normalverteilung: $\Phi_{invers}(y) := \text{qnorm}(y, \mu_0, \sigma_0) - 0.5$

$y_1 := \frac{\alpha_S}{2}$ $y_1 = 0.025$ $k1 := \Phi_{invers}(y_1) = 303.6$

$k_1 := \text{floor}(k1)$ $k_1 = 303$

Ansatz rechter Ablehnungsbereich: $\Phi\left(\frac{k - \mu_0 + 0.5}{\sigma_0}\right) \ge 1 - \frac{\alpha_S}{2}$

Inverse kumulative Normalverteilung: $\Phi_{invers}(y) := \text{qnorm}(y, \mu_0, \sigma_0) - 0.5$

$y_2 := 1 - \frac{\alpha_S}{2}$ $y_2 = 0.975$ $k2 := \Phi_{invers}(y_2) = 345.4$

$k_2 := \text{ceil}(k2)$ $k_2 = 346$

Teilaufgabe 4.2 (2 BE)
Erkären Sie, was man bei dem vorliegenden Test unter dem Fehler 2. Art versteht.

Der Fehler zweiter Art besteht darin, dass man aufgrund des Testergebnisses davon ausgeht, dass sich der Anteil der Prepaid-Karten bei jugendlichen Handybesitzern nicht verändert, obwohl er größer oder kleiner geworden ist.