

Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2009

• Mathematik 13 Technik - B II - Lösung



Teilaufgabe 1.0

Nach dem erfolgreichen Bestehen der Abschlussprüfung wird für die 600 Absolventen einer bayerischen Fach- und Berufsoberschule eine Abschlussfeier organisiert. Die Auslagen werden teilweise durch den Förderverein und teilweise aus dem Verkauf von Essensmarken finanziert. Erfahrungsgemäß kauft ein Absolvent mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,60 eine Essensmarke.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 370 Essensmarken an die Absolventen verkauft werden.

X: Anzahl der verkauften Essensmarken an 600 Absolventen:

$$n := 600 \quad p := 0.60$$

$$\mu := n \cdot p = 360 \quad \sigma := \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = 12$$

$$P(X \geq 370) = 1 - P(X \leq 369) = 1 - \Phi\left(\frac{369 - 360 + 0.5}{12}\right) = 1 - \Phi(0.792) = 1 - 0.78524 = 0.215$$

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)

Die Essensmarken werden auch an geladene Gäste (Lehrer, Eltern und Verwandte der Absolventen) verkauft. Die Finanzierung des Festes gilt als gesichert, wenn insgesamt mindestens 800 Essensmarken verkauft werden. Ein Gast kauft erfahrungsgemäß eine Essensmarke mit der Wahrscheinlichkeit 0,60.

Berechnen Sie, wie viele Personen an der Feier mindestens teilnehmen müssen, damit die Finanzierung des Festes mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,80 gewährleistet ist.

X: Anzahl der insgesamt verkauften Essensmarken bei n Gästen:

$$p := 0.60 \quad \mu(n) := n \cdot 0.60 \quad \sigma(n) := \sqrt{\mu(n) \cdot (1 - p)} \rightarrow \sqrt{0.24 \cdot n}$$

$$P(X \geq 800) \geq 0.80 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 799) \geq 0.80 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 799) \leq 0.20$$

$$\Phi\left(\frac{799 - \mu(n) + 0.5}{\sigma(n)}\right) \leq 0.20 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{799 - \mu(n) + 0.5}{\sigma(n)} \leq -0.842 \rightarrow \frac{-0.6 \cdot n + 799.5}{\sqrt{0.24 \cdot n}} \leq -0.842$$

$$799.5 - 0.6 \cdot n \leq -0.842 \cdot \sqrt{0.24 \cdot n} \quad \text{auflösen, } n \rightarrow 1357.8331777322116952 \leq n < \infty$$

$$\text{aufrunden:} \quad n \geq 1358$$

Es müssen mindestens 1358 Personen am Fest teilnehmen.

Teilaufgabe 2.0

Zusätzlich zum Verkauf von Essensmarken werden Lose verkauft. Ein Absolvent, der eine Essensmarke gekauft hat, kauft mit der Wahrscheinlichkeit von 0,50 ein Los. Insgesamt kaufen 58% der Absolventen ein Los. Weiterhin kauft ein Absolvent mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,60 eine Essensmarke.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein beliebig ausgewählter Absolvent weder eine Essensmarke noch ein Los kauft.

E: Ein zufällig ausgewählter Absolvent hat eine Essensmarke gekauft.

L: Ein zufällig ausgewählter Absolvent hat ein Los gekauft.

$$P(E) = 0.60 \quad P(L) = 0.58$$

$$P_{E(L)} = \frac{P(E \cap L)}{P(E)} = 0.50 \quad \Rightarrow \quad P(E \cap L) = P_{E(L)} \cdot P(E) = 0.50 \cdot 0.60 = 0.30$$

$$\begin{pmatrix} & L & \bar{L} & \\ E & 0.30 & 0.30 & 0.60 \\ \bar{E} & 0.28 & 0.12 & 0.40 \\ & 0.58 & 0.42 & 1 \end{pmatrix} \quad P(\bar{E} \cap \bar{L}) = 0.12$$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein beliebig ausgewählter Absolvent, der kein Los erworben hat, eine Essenmarke kauft.

$$P_{\bar{L}(E)} = \frac{P(E \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0.30}{0.42} = 0.714$$

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Ein Los ist mit der Wahrscheinlichkeit von 0,40 ein Gewinnlos. Ermitteln Sie, wie viele Lose man mindestens kaufen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 wenigstens ein Gewinnlos dabei ist.

$$P(X \geq 1) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 0) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) \leq 0.01$$

$$\binom{n}{0} \cdot 0.40^0 \cdot 0.60^n \leq 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad 0.60^n \leq 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0.60) \leq \ln(0.01)$$

$$n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.60)} \rightarrow n \geq 9.0151511038876951847 \quad \text{aufrunden:} \quad n \geq 10$$

Man muss mindestens 10 Lose kaufen.

Teilaufgabe 3.0

Für die Bühnendekoration stehen 9 Sonnenblumen und 7 Gladiolen in einer Vase bereit.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Diese Blumen werden rein zufällig in einer Reihe angeordnet. Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei dieser Anordnung alle Sonnenblumen nebeneinander liegen und am Anfang und am Ende der Reihe jeweils eine Gladiole liegt.

16 Blumen

eine Gladiole die erste Sonnenblume kann an der zweiten bis siebten Stelle liegen,
↓ 6 Möglichkeiten.

GSSSSSSSSSGGGGGG, . . . , GGGGGGSSSSSSSSSG

Für alle möglichen Fälle gilt: $\binom{16}{9} = 11440$ **combin(16, 9) = 11440**

$$P := \frac{6}{11440} = 0.000524$$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Für ein Blumengesteck werden aus den 16 Blumen rein zufällig 6 entnommen. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich in diesem Blumengesteck höchstens zwei Sonnenblumen befinden.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \leq 2) = \frac{\binom{9}{0} \cdot \binom{7}{6} + \binom{9}{1} \cdot \binom{7}{5} + \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{4}}{\binom{16}{6}} = 0.182$$

NR

$$\frac{\text{combin}(9, 0) \cdot \text{combin}(7, 6) + \text{combin}(9, 1) \cdot \text{combin}(7, 5) + \text{combin}(9, 2) \cdot \text{combin}(7, 4)}{\text{combin}(16, 6)} = 0.182$$

Teilaufgabe 4.0

Die Schülersprecherin möchte eine Fotoagentur beauftragen, Freundschaftsbilder von jedem Absolventen anzufertigen. Die Agentur will den Auftrag annehmen, wenn mindestens 60% der Absolventen ein Bild kaufen. Die Entscheidung soll auf der Grundlage eines Signifikanztestes getroffen werden, wobei 250 zufällig ausgewählte Absolventen befragt werden, ob sie ein Bild kaufen würden.

Teilaufgabe 4.1 (6 BE)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Auftrag irrtümlich abgelehnt wird, soll höchstens 5% betragen. Bestimmen Sie für diesen Fall den Annahmebereich und den Ablehnungsbereich.

Testgröße: Anzahl von "X" bei $n := 250$

Testart: Linksseitiger Signifikanztest; $p := 0.60$

Nullhypothese H_0 : $p_0 \geq p \rightarrow p_0 \geq 0.6$

Gegenhypothese H_1 : $p_1 < p \rightarrow p_1 < 0.6$

Signifikanzniveau: $\alpha_S := 5\%$

Annahmebereich: $A = \{k + 1, k + 2, \dots, N\}$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0, 1, 2, \dots, k\}$

Lösung mit Tafelwerk:

$$P(\bar{A}) \leq 0.05 \Leftrightarrow P(X \leq k) \leq 0.05$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.05$$

$$\mu := n \cdot p \quad \mu = 150 \quad \sigma := \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} \quad \sigma = 7.746$$

Tafelwerk: $\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \leq -1.645$

$$k \leq -1.645 \cdot 7.746 + 150 - 0.5 \rightarrow k \leq 136.75783$$

Abrunden: $k_0 = 136$

Annahmebereich: $A = \{137, 138, \dots, 250\}$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0, 1, \dots, 136\}$

Lösung mit Mathcad:

$$n := 250$$

$$p := 0.60$$

$$\alpha_S := 0.05$$

$$\mu_0 := n \cdot p$$

$$\mu_0 = 150$$

$$\sigma_0 := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

$$\sigma_0 = 7.746$$

Ansatz für Ablehnungsbereich (links):

$$\Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq \alpha_S$$

diskrete Verteilung

↓

Inverse kumulative Normalverteilung:

$$\Phi_{\text{invers}}(y) := \text{qnorm}(y, \mu_0, \sigma_0) - 0.5$$

$$y_0 := \alpha_S$$

$$y_0 = 0.05$$

$$k_0 := \Phi_{\text{invers}}(y_0) = 136.76$$

abrunden:

$$k_0 := \text{floor}(k_0)$$

$$k_0 = 136$$

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)

Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Auftrag irrtümlich angenommen wird, obwohl dieser insgesamt nur 50% aller Absolventen ein Bild kaufen, wenn ab 137 Kaufabsichten von 250 Befragten der Auftrag angenommen wird.

$$\mu_1 := 250 \cdot 0.50 = 125$$

$$\sigma_1 := \sqrt{\mu_1 \cdot 0.50} = 7.906$$

$$P(X \geq 137) = 1 - P(X \leq 136) = 1 - \Phi\left(\frac{136 - 125 + 0.5}{7.906}\right) = 1 - \Phi(1.455) = 1 - 0.92647 = 0.074$$