Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 12 Technik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1

Gegeben ist die reelle Funktion g' mit $g'(x) = \dfrac{1}{6+x}$ mit der Definitionsmenge $D_{g'} =]-6\,;\,6[$.

Sie ist die Ableitungsfunktion der reellen Funktion g, welche die Definitionsmenge $D_g = D_{g'}$ besitzt.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten von $g'(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge.

$$\lim_{x \to -6^+} \frac{1}{\underset{\downarrow\atop 0^+}{6+x}} \to \infty \qquad\qquad \lim_{x \to 6^-} \frac{1}{\underset{\downarrow\atop 12}{6+x}} \to \frac{1}{12}$$

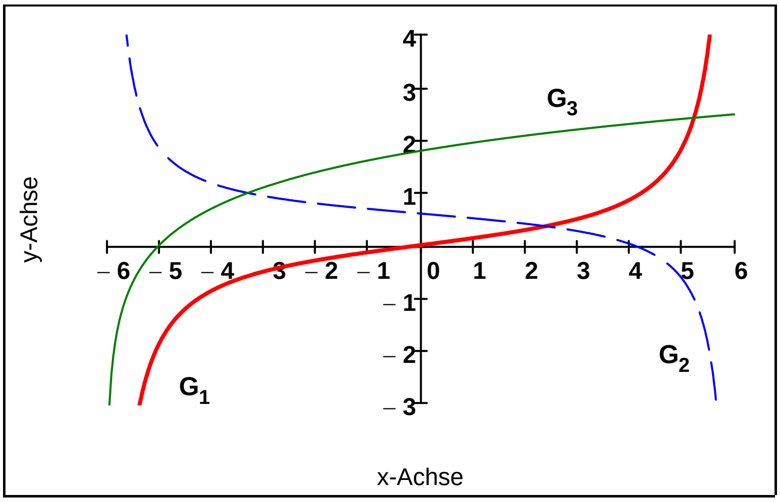
Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von g.

$\dfrac{1}{6+x} > 0$ für $-6 < x < 6$ $\Rightarrow$ g ist in D_g streng monoton wachsend.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Geben Sie mithilfe der Ergebnisse aus 1.1 und 1.2 für jeden der abgebildeten Graphen G_1, G_2 und G_3 eine kurze Begründung an, ob der jeweilige Graph der Graph der Funktion g sein kann.



G_2 ist monoton fallend, also ungeeignet.

G_1 und G_3 steigen.
G_1 jedoch sehr stark am rechten Rand, also kommt nur G_3 in Frage, nicht G_1.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Ermitteln Sie einen Funktionsterm g(x) für den Fall, dass die Funktion g eine Nullstelle bei x = -3 hat.

$$g_c(x) = \int \frac{1}{6+x}\,dx = \ln(6+x) + c$$

$$g_c(-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(6-3) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -\ln(3)$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \ln(6+x) - \ln(3)$$

Teilaufgabe 2.0
Gegeben sind nun die reellen Funktionen g mit $g(x) = \ln\left(2+\frac{x}{3}\right)$ und f mit $f(x) = g(x) - g(-x)$ und der Definitionsmenge $D_f =]\,-6\,;\,6\,[$ sowie dem zugehörigen Graphen G_f.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)
Weisen Sie nach, dass für den Funktionsterm von f gilt: $f(x) = \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right)$.

$$f(x) = \ln(6+x) - \ln(3) - (\ln(6-x) - \ln(3)) = \ln(6+x) - \ln(6-x) = \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(2+\frac{x}{3}\right) - \ln\left(2-\frac{x}{3}\right) = \ln\left(\frac{6+x}{3}\right) - \ln\left(\frac{6-x}{3}\right) = \ln(6+x) - \ln(3) - \ln(6-x) + \ln(3)$$

$$f(x) = \ln(6+x) - \ln(6-x) = \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right)$$

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Berechnen Sie die Nullstelle von f und und zeigen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6+x}{6-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6+x = 6-x \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{6-x}{6+x}\right) = \ln\left[\left(\frac{6+x}{6-x}\right)^{-1}\right] = -\ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right) = -f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Punktsymmetrie}$$

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

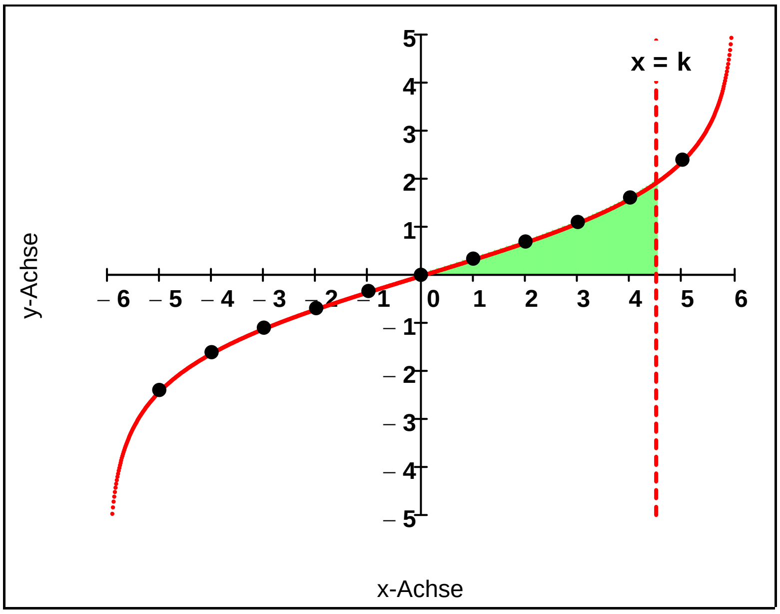
[Mögliches Teilergebnis: $\mathbf{f'(x) = \frac{12}{36 - x^2}}$]

$$f'(x) = \frac{1}{6+x} - \frac{-1}{6-x} = \frac{6-x+6+x}{(6+x)\cdot(6-x)} = \frac{12}{(6+x)\cdot(6-x)} = \frac{12}{36-x^2}$$

$f'(x) > 0$ in D_f, d. h. G_f ist streng monoton steigend in] -6 ; 6 [.

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Zeichnen Sie mithilfe bisheriger Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f für $x \in D_f$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: 1 LE = 1 cm.

$$f(x) := \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right)$$



$x_d =$	$f(x_d) =$
-5	-2.4
-4	-1.6
-3	-1.1
-2	-0.7
-1	-0.3
0	0
1	0.3
2	0.7
3	1.1
4	1.6
5	2.4

Teilaufgabe 2.5 (4 BE)

Gegeben ist die Funktion F mit $\mathbf{F(x) = x\cdot\ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right) + 6\cdot\ln\left(36 - x^2\right)}$ mit der Definitionsmenge $D_F = D_f$. Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.

$$F'(x) = 1\cdot\ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right) + x\cdot\frac{12}{36-x^2} + \frac{6}{36-x^2}\cdot(-2x) = \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right) = f(x)$$

Teilaufgabe 2.6.0
Die x-Achse, der Graph G_f und die Gerade mit der Gleichung x = k mit $0 < k < 6$ schließen ein endliches Flächenstück mit der von k abhängigen Maßzahl A(k) des Flächeninhalts ein.

Teilaufgabe 2.6.1 (6 BE)
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für k = 4 in Ihrem Schaubild aus 2.4 und zeigen Sie, dass für A(k) gilt: $A(k) = (k+6)\cdot\ln(k+6) + (6-k)\cdot\ln(6-k) - 12\cdot\ln(6)$.

$$A(k) = F(k) - F(0) = k\cdot\ln\left(\frac{6+k}{6-k}\right) + 6\cdot\ln\left(36-k^2\right) - \left(0 + 6\cdot\ln\left(6^2\right)\right)$$

↑ zusammenfassen ↑

$$A(k) = k\cdot\ln(6+k) - k\cdot\ln(6-k) + 6\cdot(\ln(6+k) + 6\cdot\ln(6-k) - 12\cdot\ln(6)$$

↓ zusammenfassen ↓

$$A(k) = (k+6)\cdot\ln(6+k) + (6-k)\cdot\ln(6-k) - 12\cdot\ln(6)$$

Teilaufgabe 2.6.2 (6 BE)
Weisen Sie mithilfe einer der L'Hospitalschen Regeln nach, dass für den linksseitigen Grenzwert gilt:
$\lim\limits_{k \to 6^-} [(6-k)\cdot\ln(6-k)] = 0$.
Berechnen Sie weiterhin den Grenzwert des Flächeninhalts $A(k)$ für $k \to 6^-$ exakt.

$$\lim_{k \to 6^-} [\overset{0}{\overset{\uparrow}{(6-k)}}\cdot\overset{-\infty}{\overset{\uparrow}{\ln(6-k)}}] = \lim_{k \to 6^-} \left(\frac{\overset{-\infty}{\overset{\uparrow}{\ln(6-k)}}}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{6-k}}}}\right) = \lim_{k \to 6^-} \left[\frac{\frac{-1}{6-k}}{\frac{1}{(6-k)^2}}\right] = \blacksquare$$

$$\blacksquare = \lim_{k \to 6^-} [-(6-k)] = \lim_{k \to 6^-} (k-6) = 0$$

$$\lim_{x \to 6^-} [(k+6)\cdot\ln(k+6) + \underset{\infty}{\underset{\downarrow}{(6-k)\cdot\ln(6-k)}} - 12\cdot\ln(6)] = 12\cdot\ln(12) - 12\cdot\ln(6)$$

$$\blacksquare = 12\cdot\ln\left(\frac{12}{6}\right) = 12\cdot\ln(2)$$

Teilaufgabe 3.0
Bei der Synthese eines Medikaments wird die Temperatur T(t) (in °C) während der Reaktionsdauer t (in Minuten) mit $t \geq 0$ kontinuierlich gemessen.

Dabei gilt: $T(t) = 10\left(t \cdot e^{1-kt} + c\right)$ mit $k, c \in IR$ und $k \neq 0$.
Zum Zeitpunkt t = 0 wird eine Temperatur von 18°C gemessen. Nach einer Reaktionsdauer von 8 Minuten beträgt die Temperatur 47,43°C.
Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Bestimmen Sie die Werte c und k.

$$T(t) = 10\left(t \cdot e^{1-kt} + c\right)$$

$$T(0) = 18 \quad \Leftrightarrow \quad 10(0 + c) = 18 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1.8$$

$$T(8) = 47.43 \quad \Leftrightarrow \quad 10\left(8 \cdot e^{1-8 \cdot k} + 1.8\right) = 47.43 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1-8 \cdot k} = \frac{4.743 - 1.8}{8}$$

$$1 - 8 \cdot k = \ln(0.368) \quad \Leftrightarrow \quad k := \frac{1 - \ln(0.368)}{8} \quad k = 0.25$$

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $c = 1.8$ und $k = 0.25$.

Teilaufgabe 3.2 (7 BE)
Berechnen Sie das Temperaturmaximum während der Reaktion.
[Mögliches Teilergebnis: $\frac{d}{dt}(T(t)) = 10 \cdot e^{1-0.25 \cdot t} - 2.5 \cdot t \cdot e^{1-0.25 \cdot t}$]

$$T(t) := 10\left(t \cdot e^{1-0.25t} + 1.8\right)$$

$$T'(t) = 10 \cdot \left[1 \cdot e^{1-0.25t} + t \cdot (-0.25) \cdot e^{1-0.25t}\right] = 10 \cdot e^{1-0.25t} - 2.5 \cdot t \cdot e^{1-0.25t}$$

$$T'(t) = (10 - 2.5 \cdot t) \cdot e^{1-0.25t}$$

$$T'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10 - 2.5 \cdot t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 4$$

Funktiuonswert: $T(4) = 58$

Vergleich mit den Randwerten: $T(0) = 18$

$$\lim_{t \to \infty} \left[10\left(t \cdot e^{1-0.25t} + 1.8\right)\right] \to 18.0$$

58 ist absolutes Maximum an der Stelle x = 4.

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)
Um die Qualität des Endprodukts nicht zu gefährden, darf in der Abkühlphase die Temperaturabnahme in jeder Minute höchstens 4°C betragen.
Zeigen Sie, dass dies selbst im Augenblick der stärksten Abkühlung eingehalten wird.

Stärkste Abkühlung $\Leftrightarrow$ Extremum von T' $\Leftrightarrow$ Wendepunkt von T

$$T'(t) := 10 \cdot e^{1-0.25 \cdot t} - 2.5 \cdot t \cdot e^{1-0.25 \cdot t}$$

$$T''(t) = 10 \cdot (-0.25) \cdot e^{1-0.25 \cdot t} - 2.5 \cdot e^{1-0.25 \cdot t} - 2.5 \cdot t \cdot (-0.25) \cdot e^{1-0.25 \cdot t}$$

$$T''(t) = 2.5 \cdot (-1 - 1 + 0.25 \cdot t) \cdot e^{1-0.25 \cdot t} = 2.5 \cdot (0.25 \cdot t - 2) \cdot e^{1-0.25 \cdot t}$$

$T''(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0.25 \cdot t - 2 = 0$ auflösen, $t \rightarrow 8.0$

$T'(8) = -3.679$ Änderungsrate negativ, also stärkste Abkühlung