Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 12 Technik - A I - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1

Gegeben ist die reelle Funktion g' mit $g'(x) := \dfrac{1}{6+x}$ mit der Definitionsmenge $D_{g'} =]-6;\,6[$.

Sie ist die Ableitungsfunktion der reellen Funktion g, welche die Definitionsmenge $D_g = D_{g'}$ besitzt.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Bestimmen Sie **ohne CAS** das Verhalten von $g'(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge.

$$\lim_{x \to -6^+} \frac{1}{\underset{\downarrow\; 0^+}{6+x}} \to \infty \qquad \lim_{x \to 6^-} \frac{1}{\underset{\downarrow\; 12}{6+x}} \to \frac{1}{12}$$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

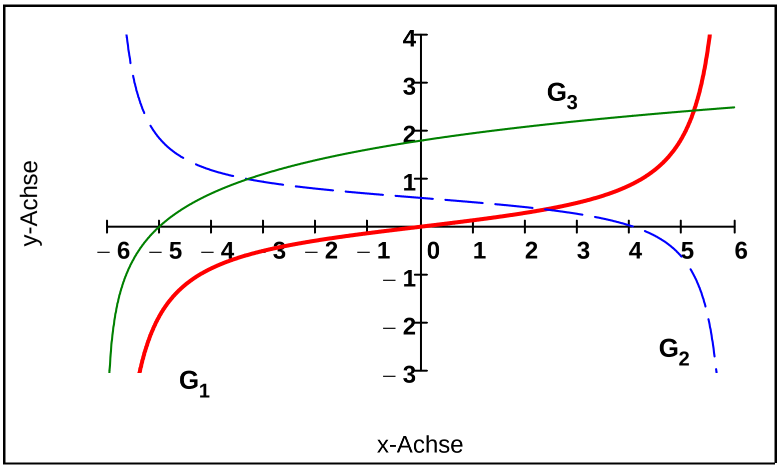
Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von g.

$g'(x) > 0 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, x\\ \text{annehmen}, -6 < x < 6\end{array}\right. \to -6 < x < 6$ $\quad\Rightarrow$ g ist in D_g streng monoton wachsend.

$g'(x) < 0$ auflösen, $x \to x < -6$ $\quad$ nicht in D_g.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Geben Sie mithilfe der Ergebnisse aus 1.1 und 1.2 für jeden der abgebildeten Graphen G_1, G_2 und G_3 eine kurze Begründung an, ob der jeweilige Graph der Graph der Funktion g sein kann.



G_2 ist monoton fallend, also ungeeignet.

G_1 und G_3 steigen.

G_1 jedoch sehr stark am rechten Rand, also kommt nur G_3 in Frage, nicht G_1.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Ermitteln Sie einen Funktionsterm g(x) für den Fall, dass die Funktion g eine Nullstelle bei x = -3 hat.

$$g(x,c) := \int \frac{1}{6+x}\,dx + c = c + \ln(x+6)$$

$$g(-3,c) = 0 \text{ auflösen}, c \rightarrow -\ln(3)$$

$$\Rightarrow \quad g(x,-\ln(3)) = \ln(x+6) - \ln(3)$$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind nun die reellen Funktionen g mit $g(x) = \ln\left(2 + \frac{x}{3}\right)$ und f mit $f(x) = g(x) - g(-x)$

und der Definitionsmenge $D_f =]-6;\ 6[$ sowie dem zugehörigen Graphen G_f.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Weisen Sie **ohne CAS** nach, dass für den Funktionsterm von f gilt: $f(x) = \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right)$.

$$f(x) = \ln(6+x) - \ln(3) - (\ln(6-x) - \ln(3)) = \ln(6+x) - \ln(6-x) = \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(2+\frac{x}{3}\right) - \ln\left(2-\frac{x}{3}\right) = \ln\left(\frac{6+x}{3}\right) - \ln\left(\frac{6-x}{3}\right) = \ln(6+x) - \ln(3) - \ln(6-x) + \ln(3)$$

$$f(x) = \ln(6+x) - \ln(6-x) = \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right)$$

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Berechnen Sie **ohne CAS** die Nullstelle von f und und zeigen Sie, dass der Graph von f punkt-symmetrisch zum rsprung ist.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6+x}{6-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6+x = 6-x \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{6-x}{6+x}\right) = \ln\left[\left(\frac{6+x}{6-x}\right)^{-1}\right] = -\ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right) = -f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Punktsymmetrie}$$

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

$$f(x) := \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right)$$

$$f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{12}{x^2-36}$$

$$f''(x) := \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{24 \cdot x}{\left(x^2-36\right)^2}$$

$$f'(x) > 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow -6 < x < 6$$

$f'(x) > 0$ in D_f, d. h. G_f ist streng monoton steigend in] -6 ; 6 [.

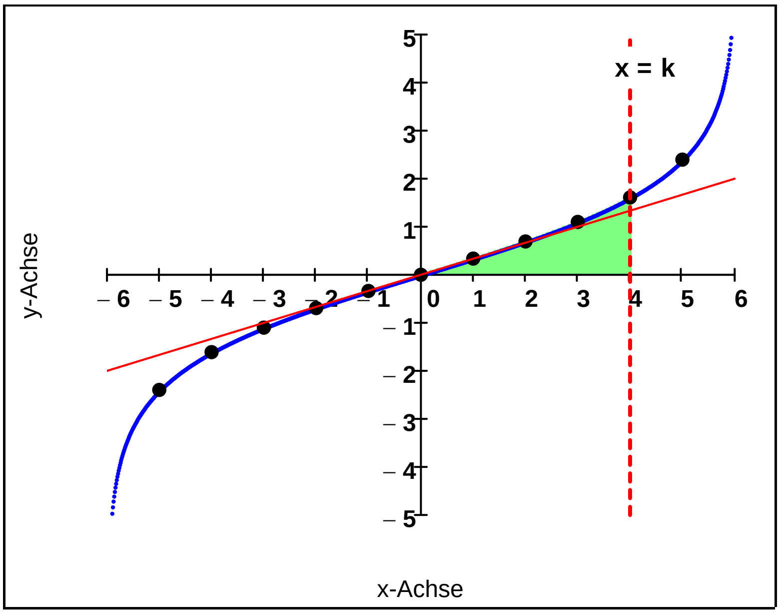
$x_W := f''(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 0$ Wendestelle, da einfache Nullstelle

Wendetangente:

$$t(x) := f'(x_W) \cdot (x - x_W) + f(x_W) \qquad t(x) = \frac{x}{3}$$

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Zeichnen Sie mithilfe bisheriger Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f für $x \in D_f$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: 1 LE = 1 cm.

$$f(x) := \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right)$$



$x_d =$	$f(x_d) =$
-5	-2.4
-4	-1.6
-3	-1.1
-2	-0.7
-1	-0.3
0	0
1	0.3
2	0.7
3	1.1
4	1.6
5	2.4

Teilaufgabe 2.5 (4 BE)
Gegeben ist die Funktion F mit $F(x) = x \cdot \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right) + 6 \cdot \ln\left(36 - x^2\right)$ mit der Definitionsmenge $D_F = D_f$. Zeigen Sie **ohne CAS**, dass F eine Stammfunktion von f ist.

$$F'(x) = 1 \cdot \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right) + x \cdot \frac{12}{36 - x^2} + \frac{6}{36 - x^2} \cdot (-2x) = \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right) = f(x)$$

Teilaufgabe 2.6 (3 BE)
Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dss der Graph von F keinen Wendepunkt besitzt.

$F''(x) = f'(x)$ $\quad$ $f'(x) \neq 0$ $\quad$ in D_f, kein Wendepunkt möglich

Teilaufgabe 2.7.0
Die x-Achse, der Graph G_f und die Gerade mit der Gleichung x = k mit $0 < k < 6$ schließen ein endliches Flächenstück mit der von k abhängigen Maßzahl A(k) des Flächeninhalts ein.

Teilaufgabe 2.6.1 (4 BE)
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für k = 4 in Ihrem Schaubild aus 2.4 und berechnen Sie die von k abhängige Maßzahl des Flächeninhalts A(k).

$$A(k) := \int_0^k f(x)\,dx = 6\cdot\ln\left(36-k^2\right) - 12\cdot\ln(6) + k\cdot(\ln(k+6) - \ln(6-k))$$

Teilaufgabe 2.6.2 (6 BE)
Berechnen Sie den linksseitigen Grenzwert des Flächeninhalts A(k) für $k \rightarrow 6^-$ exakt.

$$\lim_{k \to 6^-} A(k) = 12\cdot\ln(2)$$

Teilaufgabe 3.0
Bei der Synthese eines Medikaments wird die Temperatur T(t) (in °C) während der Reaktionsdauer t (in Minuten) mit $t \geq 0$ kontinuierlich gemessen.
Dabei gilt: $T(t) = 10\left(t\cdot e^{1-kt} + c\right)$ mit $k, c \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$.
Zum Zeitpunkt t = 0 wird eine Temperatur von 18°C gemessen. Nach einer Reaktionsdauer von 8 Minuten beträgt die Temperatur 47,43°C.
Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Bestimmen Sie die Werte der Parameter c und k.

$$T(t,k,c) := 10\left(t\cdot e^{1-k\cdot t} + c\right)$$

$$\begin{pmatrix} k_0 & c_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} T(0,k,c) = 18 \\ T(8,k,c) = 47.43 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, k, c \\ \text{Gleitkommazahl}, 2 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0.25 & 1.8 \end{pmatrix}$$

$k_0 = 0.25$ $\quad$ $c_0 = 1.80$

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: **c = 1.8** und **k = 0.25**.

Teilaufgabe 3.2 (7 BE)
Berechnen Sie das Temperaturmaximum während der Reaktion.

$$T(t) := 10\left(t\cdot e^{1-0.25t} + 1.8\right)$$

$$T'(t) := \frac{d}{dt}T(t) = 10\cdot e^{-0.25\cdot t+1} + -2.5\cdot t\cdot e^{-0.25\cdot t+1} = -\frac{5\cdot e^{1.0-0.25\cdot t}\cdot(t-4.0)}{2}$$

$T'(t) = 0$ auflösen, $t \rightarrow 4.0$

Funktionswert: $T(4) = 58$

Vergleich mit den Randwerten: $T(0) = 18$

$$\lim_{t\to\infty}\left[10\left(t\cdot e^{1-0.25t} + 1.8\right)\right] \rightarrow 18.0$$

58 ist absolutes Maximum an der Stelle x = 4.

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)
Um die Qualität des Endprodukts nicht zu gefährden, darf in der Abkühlphase die Temperaturabnahme in jeder Minute höchstens 4°C betragen.
Zeigen Sie, dass dies selbst im Augenblick der stärksten Abkühlung eingehalten wird.

Stärkste Abkühlung $\Leftrightarrow$ Extremum von T' $\Leftrightarrow$ Wendepunkt von T

$$T'(t) := 10\cdot e^{1-0.25\cdot t} - 2.5\cdot t\cdot e^{1-0.25\cdot t}$$

$$T''(t) := \frac{d}{dt}T'(t) = -5.0\cdot e^{-0.25\cdot t+1} + 0.625\cdot t\cdot e^{-0.25\cdot t+1} = \frac{5\cdot e^{1.0-0.25\cdot t}\cdot(t-8.0)}{8}$$

$T''(t) = 0$ auflösen, $t \rightarrow 8.0$

$T'(8) = -3.68$ Die stärkste Abkühlung bleibt mit 3,68 °C/min unter den geforderten 4°C/min.

Graphische Veranschaulichung nicht in der Püfung.