Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 12 Technik - A II - Lösung**

Teilaufgabe 1

Gegeben sind die reellen Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x + a}{x - 2}$ mit der jeweils maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_{f_a} an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke von f_a in Abhängigkeit von a.

$$f(x, a) := \frac{x^2 - 2 \cdot x + a}{x - 2}$$

$$D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$z(x, a) := x^2 - 2 \cdot x + a \qquad z(2, a) = 0 \text{ auflösen}, a \ \rightarrow 0$

$a = 0$	$x = 2$	ist stetig behebbare Definitionslücke
$a \neq 0$	$x = 2$	ist Polstelle mit VZW

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Lage und die Vielfachheit der Nullstellen von f_a.

$$z(x, a) = 0 \text{ auflösen}, x \ \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{1 - a} + 1 \\ 1 - \sqrt{1 - a} \end{pmatrix}$$

$$1 - a > 0 \text{ auflösen}, a \ \rightarrow a < 1$$

$a < 1 \wedge a \neq 0$	zwei einfache Nullstellen	$x_1 = \sqrt{1 - a} + 1$	$x_2 = 1 - \sqrt{1 - a}$
$a > 1$	keine Nullstellen		
$a = 1$	eine zweifache Nullstelle	$x_0 = 1$	
$a = 0$	$f(x, 0) \rightarrow -\frac{2 \cdot x - x^2}{x - 2}$ vereinfachen $\rightarrow x$	$x = 0$	einfache Nullstelle

Teilaufgabe 1.3 (9 BE)
Ermitteln Sie für $a > 0$ die Art und die Abszisse aller relativen Extrempunkte des Graphen von f_a.

[Mögliches Teilergebnis: $f'_a(x) = \dfrac{x^2 - 4\cdot x - a + 4}{x^2 - 4\cdot x + 4}$]

$$f'_a(x) = \frac{(2\cdot x - 2)\cdot(x-2) - \left(x^2 - 2\cdot x + a\right)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2\cdot x^2 - 4\cdot x - 2\cdot x + 4 - x^2 + 2\cdot x - a}{(x-2)^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{x^2 - 4\cdot x + 4 - a}{(x-2)^2}$$

$$f'(x,a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4\cdot x + 4 - a = 0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{a} + 2 \\ 2 - \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

		$x = 2 - \sqrt{a}$		$x \neq 2$		$x = 2 + \sqrt{a}$	
Zähler	pos		neg		neg		pos
Nenner	pos		pos		pos		pos
f'(x)	pos		neg		neg		pos
G_f	sms		smf		smf		sms
		HP		Pol		TP	

lok. Maximum an der Stelle

$x_{HP} = 2 - \sqrt{a}$

lok. Minimum an der Stelle

$x_{TP} = 2 + \sqrt{a}$

Teilaufgabe 1.4.0
Für $a = 1$ erhält man die Funktion f_1, die im Folgenden mit f bezeichnet wird, d. h.

$$f(x) = f_1(x) = \frac{x^2 - 2\cdot x + 1}{x - 2}.$$

Teilaufgabe 1.4.1 (5 BE)
Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f. Geben Sie auch die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f an.

$$f(x) := \frac{x^2 - 2\cdot x + 1}{x - 2} \qquad f'(x) = \frac{x^2 - 4\cdot x + 3}{(x-2)^2}$$

Polynomdivision:

$$\left(x^2 - 2\cdot x + 1\right) \div (x - 2) = x + \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{-\left(x^2 - 2\cdot x\right)}{\qquad 1}$$

schiefe Asymptote: $g(x) := x$

senkrechte Asymptote: $x = 2$

waagrechte Tangenten: $x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $f(1) = 0$ $f(3) = 4$

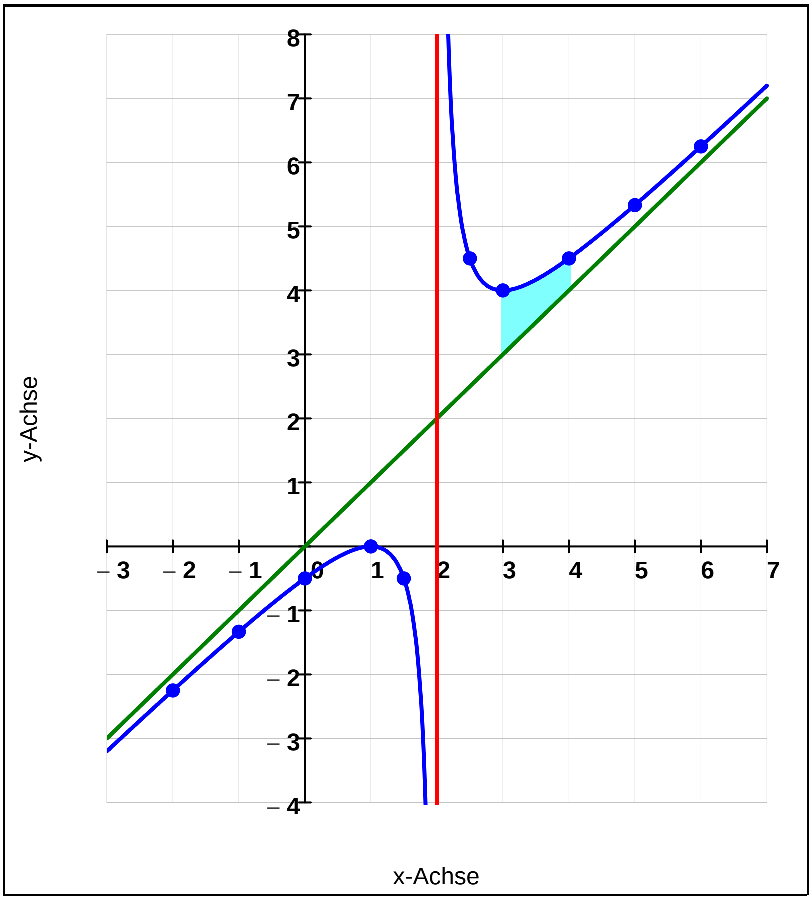
Hochpunkt: HP(1/0) Tiefpunkt: TP(3/4)

Teilaufgabe 1.4.2 **(5 BE)**
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f sowie sämtliche Asymptoten für $-2 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 1 LE = 1 cm.

x1 =	f(x1) =	x2 =	f(x2) =
-2	-2.3	3	4
-1	-1.3	4	4.5
0	-0.5	5	5.3
1	0	6	6.3

$f(1.5) = -0.5$

$f(2.5) = 4.5$



Teilaufgabe 1.4.3 (6 BE)
Der Graph von f und die Winkelhalbierende des I. Quadranten schließen mit den senkrechten Geraden mit den Gleichungen $x = 3$ und $x = b$ mit $b \in IR$ und $b > 3$ ein Flächenstück ein.
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung au 1.4.2 für $b = 4$.
Bestimmen Sie anschließend den Wert von b so, dass der Flächeninhalt dieses Flächenstücks die Maßzahl 2 hat.

$$A = \int_3^b \left(x + \frac{1}{x-2} - x\right) dx = \ln(b-2) - \ln(3-2)$$

$\ln(b-2) = 2$ $\qquad$ $b - 2 = e^2$ $\qquad$ $b = 2 + e^2 = 9.389$

Teilaufgabe 2.0
Gegeben ist die reelle Funktion g mit $g(x) = \ln(f(x))$ mit der Funkton f aus 1.4.0 und der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset IR$.

$$f(x) := \frac{x^2 - 2\cdot x + 1}{x-2} \qquad g(x) := \ln(f(x)) \rightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 2\cdot x + 1}{x-2}\right)$$

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass für die Definitionsmenge D_g gilt: $D_g =]\,2\,;\,\infty\,[$.
Untersuchen Sie außerdem das Verhalten der Funktionswerte $g(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge D_g.

$f(x) > 0$ für x>2 $\Rightarrow$ $D_g =]\,2\,;\,\infty\,[$

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{x^2 - 2\cdot x + 1}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{x-2}}\right) \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \ln(\infty) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x + \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{1}{x-2}}\right) \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \ln(\infty) \rightarrow \infty$$

Teilaufgabe 2.2
Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunkts des Graphen der Funktion g.
[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - 3\cdot x + 2}$

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{x-2}{x^2 - 2\cdot x + 1}\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2}\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-3)}{(x-2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x-3}{(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{x-3}{x^2 - 3\cdot x + 2}$$

$g'(x) = 0$ $\qquad$ $x_0 = 3$

	$x \neq 2$		$x = 3$	
Zähler		neg		pos
Nenner		pos		pos
g'(x) nicht definiert		neg		pos
g(x) nicht definiert		smf		sms
			TP	

$$g(3) = \ln\left(\frac{9-6+1}{3-2}\right) = \ln(4) = 1 - 4$$

$TP(3, \ln(4))$

Teilaufgabe 2.3 **(4 BE)**
Begründen Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung von g, dass der Graph von g für $x > 3$ mindestens einen Wendepunkt besitzt.

$$g(x) \rightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 2\cdot x + 1}{x-2}\right) \qquad g'(x) := \frac{x-3}{x^2 - 3\cdot x + 2}$$

$g'(x)$ ist ein echter Bruch, also $\lim\limits_{x \to \infty} g'(x) \rightarrow 0$

$g'(3) = 0$ $\qquad$ $g'(4) = 0.167$ $\qquad$ also >0 $\qquad$ und g' ist stetig in D_g

Extemwertsatz: $\qquad$ g' nimmt ein Extremum an, also besitzt g einen Wendepunkt

Teilaufgabe 3.0
Um die Ausbreitung von Borkenkäfern in bayerischen Wäldern zu erforschen, wird der Befall eines ausgewählten Baumes über den Zeitraum von 12 Monaten untersucht. Die Anzahl der in diesem Baum befindlichen Borkenkäfer kann näherungsweise durch den Term $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot (t^2 - 12 \cdot t)}$ mit $t, \lambda \in IR$ und $t \geq 0, \lambda \geq 0$ beschrieben werden, wobei N_0 die Anzahl der Borkenkäfer zu Beginn des Beobachtungszeitraums und t die Zeit in Monaten ab Beobachtungsbeginn ist.

Es ist bekannt, dass sich die Anzahl der Borkenkäfer nach dem ersten Monat verdreifacht hat und nach einem weiteren Monat 133 Borkenkäfer gezählt wurden.

Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden, sofern nicht anders gefordert. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Bestimmen Sie λ und N_0. Runden Sie dabei N_0 auf eine ganze Zahl.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot (t^2 - 12 \cdot t)}$$

$$N(1) = 3 \cdot N_0 \quad \Leftrightarrow \quad N_0 \cdot e^{-11 \cdot \lambda} = 3 \cdot N_0 \quad \Leftrightarrow \quad -11 \cdot \lambda = \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda := -\frac{\ln(3)}{11} = -0.10$$

$$N(2) = 133 \quad \Leftrightarrow \quad N_0 \cdot e^{-20 \cdot \lambda} = 133 \quad \Leftrightarrow \quad N_0 := \frac{133}{e^{-20 \cdot (-0.10)}} = 18$$

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $\lambda = -0.10$ und $N_0 = 18$.

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)
Ab einem Befall von 540 Borkenkäfern gilt der Baum als dauerhaft geschädigt.
Berechnen Sie den Zeitpunkt t_0, zu dem diese anzahl erstmalig erreicht ist.

$$N(t) := 18 \cdot e^{-0.1 \cdot (t^2 - 12 \cdot t)}$$

$$N(t_0) = 540 \qquad 18 \cdot e^{-0.1 \cdot (t^2 - 12 \cdot t)} = 540 \qquad e^{-0.1 \cdot (t^2 - 12 \cdot t)} = 30$$

$$-0.1 \cdot (t^2 - 12 \cdot t) = \ln(30)$$

$$-0.1 \cdot t^2 + 1.2 \cdot t - \ln(30) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 4.59 \\ 7.41 \end{pmatrix}$$

nach 4,59 Monaten ist der Zeitpunkt erreicht

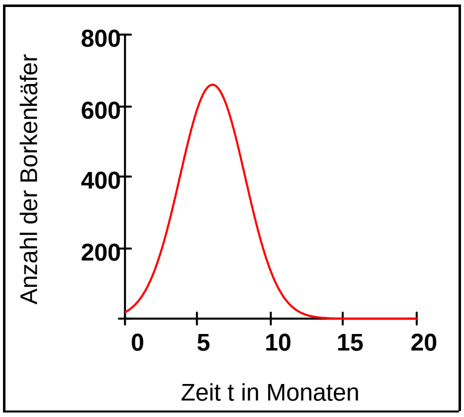
Teilaufgabe 3.3 (4 BE)
Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_{max}, zu dem der Befall des Baumes am größten ist.

[Mögliches Teilergebnis: $N'(t) = -3.6 \cdot e^{-0.10 \cdot \left(t^2 - 12 \cdot t\right)} \cdot (t - 6)$]

$$N'(t) = 18 \cdot (-0.1) \cdot (2 \cdot t - 12) \cdot e^{-0.1 \cdot \left(t^2 - 12 \cdot t\right)} = -3.6 \cdot (t - 6) \cdot e^{-0.1 \cdot \left(t^2 - 12 \cdot t\right)}$$

$t_{max} = 6$ VZW von Plus nach Minus rel. Hochpunkt

$N(0) = 18$ und t_{max} einzige Extremstelle, also absolutes Maximum.



Teilaufgabe 3.4 (5 BE)
N'' besitzt nur die beiden einfachen Nullstellen $t_1 := 6 - \sqrt{5}$ und $t_2 := 6 + \sqrt{5}$ (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_V, zu dem sich die Borkenkäfer am stärksten vermehren.

$t_1 = 3.764$ $t_2 = 8.236$

t_1 und t_2 sind einfache Nullstellen von N'', also ist N' dort jeweils extremal.

$$N'(t) := \frac{d}{dt}N(t) \rightarrow 18 \cdot e^{1.2 \cdot t + -0.1 \cdot t^2} \cdot (-0.2 \cdot t + 1.2)$$

$N'(3.764) = 178.69$ $t_V = 3.76$ ist Zeitpunkt, zu dem sich die Borkenkäfer am stärksten vermehren

$N'(8.236) = -178.69$