

Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

• Mathematik 12 Technik - B I - Lösung



Teilaufgabe 1

In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind die Ebenen E_a und F , sowie die Gerade h gegeben. Dabei gilt:

$$E_a: 2 \cdot a \cdot x_1 - (a - 1) \cdot x_3 + 2 = 0 \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R};$$

Die Ebene F enthält die Gerade h und verläuft parallel zur x_2 -Achse.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Stellen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform auf.

[Mögliches Teilergebnis: $F: x_1 + 2x_3 - 1 = 0$]

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F: x_1 + 2x_3 - 1 = 0$$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von h und E_a in Abhängigkeit von a .

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a + 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{senkrecht, falls } a = \frac{1}{5}$$

$$\text{Aufpunkt } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ von } h \text{ in } E_{0,2}: \frac{2}{5} \cdot x_1 + \frac{4}{5} \cdot x_3 + 2 = 0 \text{ einsetzen:} \quad \Leftrightarrow \quad h \text{ parallel zu } E$$

$$\frac{2}{5} \cdot 3 + \frac{4}{5} \cdot (-1) + 2 = \frac{12}{5} \quad \frac{12}{5} \neq 0$$

Für $a = \frac{1}{5}$ ist h echt parallel zur Ebene.

Für $a \neq \frac{1}{5}$ schneidet h die Ebene.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Untersuchen Sie, ob sich die Ebenen E_a und F senkrecht schneiden können, und für welchen Wert von a die Ebenen E_a und F parallel sind.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} = 0 \quad 2a - 2a + 2 \neq 0 \quad \Rightarrow E_a \text{ und F sind nie senkrecht zueinander.}$$

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} \quad \sigma = 2a \quad 2\sigma = -a+1 \quad 4a = -a+1 \quad \Rightarrow \text{Für } a = \frac{1}{5} \text{ sind die Ebenen parallel.}$$

Teilaufgabe 1.4 (7 BE)

Ermitteln Sie alle Werte von a, für die sich die Ebenen E_a und F unter einem Winkel von 45° schneiden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} \right| \cdot \cos(45^\circ) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} \right| \cdot \cos(135^\circ)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{4a^2 + (-a+1)^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{|2a - 2a + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5a^2 - 2a + 1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10} \cdot \sqrt{5a^2 - 2a + 1} = 4 \quad \Leftrightarrow 50a^2 - 20a + 10 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 50a^2 - 20a - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow 25a^2 - 10a - 3 = 0$$

$$a_1 = \frac{10 - \sqrt{100 - 4 \cdot 25 \cdot (-3)}}{50} = \frac{10 - 20}{50} = \frac{-1}{5}$$

$$a_2 = \frac{10 + 20}{50} = \frac{3}{5}$$

Teilaufgabe 2.0

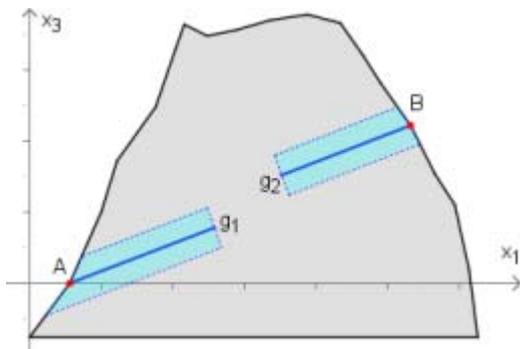
Beim Bau einer neuen Zahnradbahn ist ein Bergmassiv zu untertunneln (siehe Schnittskizze - nicht maßstäblich).

Um die Bauzeit des Tunnels zu verkürzen, wird von den Punkten A und B aus gleichzeitig eine zylinderförmige Tunnelröhre mit einem Radius von 2m gebohrt.

Für die Berechnungen wird ein kartesisches Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 verwendet, dessen x_1x_2 -Ebene waagrecht verläuft. In diesem Koordinatensystem gilt $A(2|100|0)$ und $B(1002|350|254)$. Die Mitten der Tunnelröhrenhälften liegen auf den Geraden g_1 bzw. g_2 . Vom Punkt A aus wird

in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und vom Punkt B aus in der Gegenrichtung gebohrt. Alle Koordinaten sind in

Meter angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.



Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Weisen Sie nach, dass der Punkt B genau 4 m oberhalb (in x_3 -Richtung) von g_1 liegt.

$$\mathbf{OA} := \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{OB} := \begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ 254 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade } g_1: \quad \mathbf{x}_{g_1}(\lambda) := \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt C liegt auf g_1 :

$$\begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1002 = 2 + 4\lambda \Rightarrow \lambda = 250 \\ 350 = 100 + \lambda \Rightarrow \lambda = 250 \\ c = 250 \end{array}$$

$$\mathbf{OC} := \begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ 250 \end{pmatrix} \quad \mathbf{OB} - \mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{C liegt 4m unterhalb von B}$$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Untersuchen Sie, ob bei diesen Verhältnissen die Tunnelröhrenhälften wenigstens teilweise aufeinander treffen.

Allgemeiner Geradenpunkt von g_1 :

$$\mathbf{OX}(\lambda) := \mathbf{x}_{g_1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \lambda + 2 \\ \lambda + 100 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Abstand B von g_1 :

$$(\mathbf{OX}(\lambda) - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ 254 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 18 \cdot \lambda - 4504 = 0$$

Auflösen: $\lambda_0 := \frac{4504}{18}$ Loftfußpunkt: $\mathbf{OL} := \mathbf{x}_{g_1}(\lambda_0) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{9026}{9} \\ \frac{3152}{9} \\ \frac{2252}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1002.889 \\ 350.222 \\ 250.222 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor: $\mathbf{LB} := \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ 254 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.889 \\ 0.222 \\ -3.778 \end{pmatrix}$

Abstand: $|\mathbf{LB}| = 3.9 < 4$

Die Tunnelröhren treffen knapp aufeinander.