Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 12 Technik - B I - Lösung mit CAS**

made with mathcad

Teilaufgabe 1

In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 sind die Ebenen E_a und F, sowie die Gerade h gegeben. Dabei gilt:

$$E_a\colon\ 2\cdot a\cdot x_1 - (a-1)\cdot x_3 + 2 = 0 \ \text{ mit } a \in IR \quad \text{und} \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda \in IR;$$

Die Ebene F enthält die Gerade h und verläuft parallel zur x_2 − **Achse**.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Stellen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform auf.

[Mögliches Teilergebnis: **F:** $x_1 + 2x_3 - 1 = 0$]

$$n_F := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 + 2\cdot x_3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad F\colon\ x_1 + 2x_3 - 1 = 0$$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von h und E_a in Abhängigkeit von a.

$$n_E(a) := \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} \qquad n_E(a)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 5\cdot a - 1 = 0 \ \text{auflösen}, a \ \rightarrow \frac{1}{5}$$

$\Leftrightarrow$ h parallel zu E $\quad \Leftrightarrow$ senkrecht, falls $\quad a = \frac{1}{5}$

$$E(x_1, x_2, x_3, a) := 2\cdot a\cdot x_1 - (a-1)\cdot x_3 + 2$$

Aufpunkt $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ von h in E_a einsetzen:

$$E(3, -1, -1, a) = 0 \rightarrow 7\cdot a + 1 = 0 \ \text{auflösen}, a \ \rightarrow -\frac{1}{7}$$

Für $a = \frac{1}{5}$ ist h echt parallel zur Ebene.

Für $a \neq \frac{1}{5}$ schneidet h die Ebene.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Untersuchen Sie, ob sich die Ebenen E_a und F senkrecht schneiden können, und für welchen Wert von a die Ebenen E_a und F parallel sind.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \qquad \text{ungleich Null} \qquad \Rightarrow E_a \text{ und F sind nie senkrecht zueinander.}$$

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} \qquad \sigma = 2a$$

$$2\sigma = -a + 1 \qquad 4a = -a + 1 \qquad \Rightarrow \text{Für } a = \frac{1}{5} \text{ sind die Ebenen parallel.}$$

Teilaufgabe 1.4 (7 BE)
Ermitteln Sie **ohne CAS** alle Werte von a, für die sich die Ebenen E_a und F unter einem Winkel von 45° schneiden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix}\right| \cdot \cos(45°) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix}\right| \cdot \cos(135°)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 + (-a+1)^2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{|2 \cdot a - 2 \cdot a + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5 \cdot a^2 - 2 \cdot a + 1}}$$

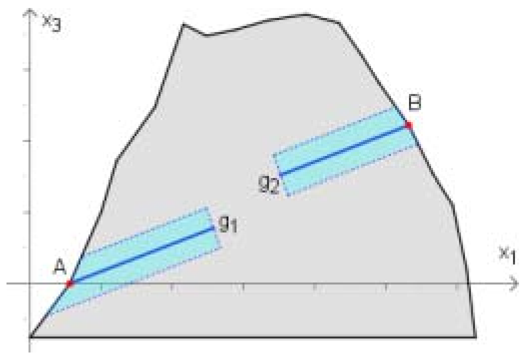
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{10} \cdot \sqrt{5 \cdot a^2 - 2 \cdot a + 1} = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 50 \cdot a^2 - 20 \cdot a + 10 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 50 \cdot a^2 - 20 \cdot a - 6 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 25 \cdot a^2 - 10 \cdot a - 3 = 0$$

$$a_1 = \frac{10 - \sqrt{100 - 4 \cdot 25 \cdot (-3)}}{50} = \frac{10 - 20}{50} = \frac{-1}{5}$$

$$a_2 = \frac{10 + 20}{50} = \frac{3}{5}$$

Teilaufgabe 2.0
Beim Bau einer neuen Zahnradbahn ist ein Bergmassiv zu untertunneln (siehe Schnittskizze - nicht maßstäblich).
Um die Bauzeit des Tunnels zu verkürzen, wird von den Punkten A und B aus gleichzeitig eine zylinderförmige Tunnelröhre mit einem Radius von 2m gebohrt.
Für die Berechnungen wird ein kartesisches Koordinatensystem des R^3 verwendet, dessen x_1x_2-Ebene waagrecht verläuft. In diesem Koordinatensystem gilt A(2| 100| 0) und B(1002| 350| 254).
Die Mitten der Tunnelröhrenhälften liegen auf den Geraden g_1 bzw. g_2 . Vom Punkt A aus wird in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und vom Punkt B aus in der Gegenrichtung gebohrt. Alle Koordinaten sind in Meter angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.



Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Weisen Sie nach, dass der Punkt B genau 4 m oberhalb (in x_3-Richtung) von g_1 liegt.

$$\mathbf{OA} := \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{OB} := \begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ 254 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade g_1:
$$\mathbf{x_{g1}}(\lambda) := \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt C liegt auf g_1:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & c_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \lambda, c \;\rightarrow (250 \quad 250)$$

$$\mathbf{OC} := \begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ c_0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{OB} - \mathbf{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \text{C liegt 4m unterhalb von B}$$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Untersuchen Sie, ob bei diesen Verhältnissen die Tunnelröhrenhälften wenigstens teilweise aufeinander treffen.

Allgemeiner Geradenpunkt von g_1:

$$\mathbf{OX}(\lambda) := \mathbf{x_{g1}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 4\cdot\lambda + 2 \\ \lambda + 100 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Abstand B von g_1:

$$(\mathbf{OX}(\lambda) - \mathbf{B})\cdot\mathbf{u} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ 254 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 18\cdot\lambda - 4504 = 0$$

Auflösen: $\lambda_0 := \frac{4504}{18}$ Loftußpunkt: $\mathbf{OL} := \mathbf{x_{g1}}(\lambda_0) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{9026}{9} \\ \frac{3152}{9} \\ \frac{2252}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1002.889 \\ 350.222 \\ 250.222 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor: $\mathbf{LB} := \begin{pmatrix} 2 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_0\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1002 \\ 350 \\ 254 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.889 \\ 0.222 \\ -3.778 \end{pmatrix}$

Abstand: $|\mathbf{LB}| = 3.9 \quad < 4$

Die Tunnelröhren treffen knapp aufeinander.