Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

- ## Mathematik 12 Technik - B II - Lösung

Teilaufgabe 1

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden g_1, g_2 und die Ebene F

gegeben: $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \lambda \in \mathbb{R};\; g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \; \mu \in \mathbb{R};$

$F\colon\; 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 - 11 = 0$

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Begründen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 eine Ebene E aufspannen, und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform.
[Mögliches Teilergebnis: $E\colon\; x_1 + 4 + x_2 + 7 \cdot x_3 - 10 = 0$

g_1 und g_2 sind nicht parallel.
g_1 und g_2 schneiden sich in A(2/2/0).

$\Rightarrow$ g_1 und g_2 spannen eine Ebene auf.

Parameterform:

$$E(\lambda, \mu) := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$n_E := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Normalenform und Koordinatenform:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot n_E = 0 \rightarrow x_1 + 4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 - 10 = 0$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Die Ebenen E und F schneiden sich in der Geraden s. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnitt-geraden s.

[Mögliches Teilergebnis: $s\colon\; \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \sigma \in \mathbb{R}$]

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II) - 2 \cdot (I)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II) \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Wähle $x_3 = \tau$ $\quad x_2 = 3 - 2 \cdot \tau$ $\quad x_1 = 10 - 7 \cdot \tau - 4 \cdot (3 - 2 \cdot \tau) = \tau - 2$

Schnittgerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 + \tau \\ 3 - 2 \cdot \tau \\ \tau \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.3 **(4 BE)**
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen E und F. Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\right|} = \frac{|2+20+56|}{\sqrt{1+16+49}\cdot\sqrt{4+25+64}} = \frac{78}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{93}} = 0.99559$$

$\alpha := \arccos(0.99559) = 5.383\cdot°$ gerundet: $\alpha = 5.4\cdot°$

Teilaufgabe 1.4 **(5 BE)**
Ermitteln Sie den Abstand der parallelen Geraden **s** und $\mathbf{g_1}$.

Richtungsvektor von g senkrecht allgemeinem Geradenpunkt von g

$$\left[\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 0 \rightarrow 6\cdot\sigma - 6 = 0 \text{ auflösen}, \sigma \ \rightarrow 1$$

Lotfußpunkt:

$$OL := \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Aufpunkt von g_1:

$$OA := \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor Lotfußpunkt - Aufpunkt

$$AL := OL - OA = \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Abstand von s und g_1:

$$|AL| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11} = 3.32$$

Teilaufgabe 2.0
Zusätzlich zu den Ebenen E und F aus Aufgabe 1 sind nun die Ebenen
H_a: $a \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 = 12$ mit $a \in IR$ gegeben.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)
Prüfen Sie, ob eine der Ebenen H_a zu **F** parallel ist.

Normalenvektoren:

$$n_H(a) := \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad n_F := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{zu prüfen:} \qquad n_H(a) = \lambda \cdot n_{GF}$$

$$a = 2 \cdot \lambda$$

$$6 = 5 \cdot \lambda \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \frac{6}{5}$$

$$9 = 8 \cdot \lambda \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \frac{9}{8}$$

ungleich, also nicht parallel

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Bestimmen Sie alle Werte von a so, dass für den Abstand d_a des Ursprungs O von der Ebene H_a gilt: $d_a = \frac{12}{11}$

Lotgerade g durch O senkrecht zu H_a: $\quad x = \sigma \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

g geschnitten mit H_a:

$$a \cdot \sigma \cdot a + 6 \cdot 6 \cdot \sigma + 9 \cdot 9 \cdot \sigma = 12 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \cdot \sigma + 117 \cdot \sigma - 12 = 0 \text{ auflösen}, \sigma \rightarrow \frac{12}{a^2 + 117}$$

Ortsvektor zum Lotfußpunkt: $\quad OL = \frac{12}{a^2 + 117} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Betrag: $\quad d_a = \frac{12}{a^2 + 117} \cdot \sqrt{a^2 + 117}$

Bedingung: $\quad \frac{12}{a^2 + 117} \cdot \sqrt{a^2 + 117} = \frac{12}{11} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + 117}} = \frac{1}{11}$

Quadrieren: $\quad a^2 + 117 = 121 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = -2 \vee a_2 = 2$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Normalenvektoren der Ebenen $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ und $\mathbf{H_a}$ keine Basis des IR^3 bilden.

Keine Basis $\Leftrightarrow$ Spatprodukt gleich Null: $\left(\mathbf{n_E} \times \mathbf{n_F}\right) \cdot \mathbf{n_H} = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot a - 36 + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot a - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$$