Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 12 Technik - B II - Lösung mit CAS**

made with mathcad

Teilaufgabe 1

In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 sind die Geraden g_1, g_2 und die Ebene F gegeben:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in IR; \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mu \in IR;$$

$$F: 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 - 11 = 0$$

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Begründen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 eine Ebene E aufspannen, und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform.

[Mögliches Teilergebnis: $E: x_1 + 4 + x_2 + 7 \cdot x_3 - 10 = 0$]

g_1 und g_2 sind nicht parallel.

g_1 und g_2 schneiden sich in A(2/2/0).

$\Rightarrow$ g_1 und g_2 spannen eine Ebene auf.

Parameterform:

$$E(\lambda, \mu) := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$n_E := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Normalenform und Koordinatenform:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot n_E = 0 \rightarrow x_1 + 4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 - 10 = 0$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Die Ebenen E und F schneiden sich in der Geraden s. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnitt-geraden s.

[Mögliches Teilergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \sigma \in IR$]

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{zref}(M) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Wähle $\quad x_3 = \tau \quad x_2 = 3 - 2 \cdot \tau \quad x_1 = -2 + \tau$

Schnittgerade s:

$$s(\tau) := \begin{pmatrix} -2 + \tau \\ 3 - 2 \cdot \tau \\ \tau \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.3 **(4 BE)**
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen E und F. Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\right|} \text{ auflösen}, \alpha \rightarrow \begin{pmatrix}\operatorname{acos}\left(\frac{13\cdot\sqrt{682}}{341}\right)\\ -\operatorname{acos}\left(\frac{13}{341}\cdot\sqrt{682}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5.4\\-5.4\end{pmatrix}\cdot°$$

Teilaufgabe 1.4 **(5 BE)**
Ermitteln Sie den Abstand der parallelen Geraden **s** und $\mathbf{g_1}$.

Richtungsvektor von g senkrecht allgemeinem Geradenpunkt von g

$$\left[s(\tau) - \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 0 \rightarrow 6\cdot\tau - 6 = 0 \text{ auflösen}, \tau \rightarrow 1$$

Lotfußpunkt:

$$OL := s(1) = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Aufpunkt von g_1:

$$OA := \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor Lotfußpunkt - Aufpunkt

$$AL := OL - OA = \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Abstand von s und g_1:

$$|AL| = \sqrt{11} = 3.32$$

Teilaufgabe 2.0
Zusätzlich zu den Ebenen E und F aus Aufgabe 1 sind nun die Ebenen
$\mathbf{H_a}$: $a \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 = 12$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)
Prüfen Sie **ohne CAS**, ob eine der Ebenen $\mathbf{H_a}$ zu **F** parallel ist.

Normalenvektoren:

$$n_H(a) := \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad n_F := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{zu prüfen:} \qquad n_H(a) = \lambda \cdot n_{GF}$$

$$a = 2 \cdot \lambda$$

$$6 = 5 \cdot \lambda \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \frac{6}{5}$$

$$9 = 8 \cdot \lambda \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \frac{9}{8}$$

ungleich, also nicht parallel

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Bestimmen Sie alle Werte von a so, dass für den Abstand $\mathbf{d_a}$ des Ursprungs O von der Ebene $\mathbf{H_a}$ gilt: $d_a = \frac{12}{11}$

Ebene H: $H(x_1, x_2, x_3, a) := a \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 - 12$

Lotgerade g durch O senkrecht zu H_a: $g(\sigma, a) := \sigma \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

g geschnitten mit H_a:

$$H\left(g(\sigma, a)_1, g(\sigma, a)_2, g(\sigma, a)_3, a\right) = 0 \rightarrow \sigma \cdot a^2 + 117 \cdot \sigma - 12 = 0 \text{ auflösen}, \sigma \rightarrow \frac{12}{a^2 + 117}$$

Ortsvektor zum Lotfußpunkt:

$$OL(a) := g\left(\frac{12}{a^2 + 117}, a\right) = \begin{pmatrix} \frac{12 \cdot a}{a^2 + 117} \\ \frac{72}{a^2 + 117} \\ \frac{108}{a^2 + 117} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{OL(a) \cdot OL(a)} = \frac{12}{11} \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Bestimmen Sie **ohne CAS** den Wert von a, für den die Normalenvektoren der Ebenen **E**, **F** und $\mathbf{H_a}$ keine Basis des IR^3 bilden.

Keine Basis ⇔ Spatprodukt gleich Null: $\left(n_E \times n_F\right) \cdot n_H = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot a - 36 + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot a - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$$