Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = \frac{2 \cdot e^x}{a + e^{2 \cdot x}}$ mit $a \in IR \setminus \{0\}$ und der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq IR$.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

Bestimmen Sie D_{f_a} in Abhängigkeit von a sowie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern von D_{f_a}.

$$a + e^{2 \cdot x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \cdot \ln(-a) = \ln\left(\sqrt{-a}\right)$$

$a > 0$ $\quad D_{f_a} = IR$

$a < 0$ $\quad D_{f_a} = IR \setminus \{ \ln\left(\sqrt{-a}\right) \}$

L'Hosp.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{2 \cdot e^x}}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{a + e^{2 \cdot x}}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2 \cdot e^x}{2 \cdot e^{2 \cdot x}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\overset{0}{\overset{\uparrow}{2 \cdot e^x}}}{\underset{\underset{a}{\downarrow}}{a + e^{2 \cdot x}}} \right) = 0$$

für $a < 0$

$$\lim_{x \to \ln\left(\sqrt{-a}\right)^-} \left(\frac{2 \cdot e^x}{a + e^{2 \cdot x}} \right) = -\infty \qquad \frac{2 \cdot e^{\ln\left(\sqrt{-a}\right)}}{a + e^{2 \cdot \ln\left(\sqrt{-a}\right)}} = \frac{2 \cdot e^{\ln\left(\sqrt{-a}\right)}}{a + e^{\ln\left[\left(\sqrt{-a}\right)^2\right]}} = \frac{2 \cdot \sqrt{-a}}{\underset{\underset{0^-}{\downarrow}}{a + \left(\sqrt{-a}\right)^2}}$$

$$\lim_{x \to \ln(\sqrt{-a})^+} \frac{2 \cdot e^x}{a + e^{2 \cdot x}} = \infty \qquad \frac{2 \cdot e^{\ln(\sqrt{-a})}}{a + e^{2 \cdot \ln(\sqrt{-a})}} = \frac{2 \cdot \sqrt{-a}}{\underbrace{a + (\sqrt{-a})^2}_{\downarrow \; 0^+}}$$

Im Folgenden gilt nun a > 0.

Teilaufgabe 1.2 **(8 BE)**
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f_a .

[mögliches Teilergebnis: $f'_a(x) = \dfrac{2 \cdot e^x \cdot (a - e^{2 \cdot x})}{(a + e^{2 \cdot x})^2}$]

$$f'_a(x) = \frac{2 \cdot e^x \cdot (a + e^{2 \cdot x}) - 2 \cdot e^x \cdot 2 \cdot e^{2 \cdot x}}{(a + e^{2 \cdot x})^2} = \frac{2 \cdot a \cdot e^x + 2 \cdot e^{3 \cdot x} - 4 \cdot e^{3 \cdot x}}{(a + e^{2 \cdot x})^2} = \frac{2 \cdot a \cdot e^x - 2 \cdot e^{3 \cdot x}}{(a + e^{2 \cdot x})^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{2 \cdot e^x \cdot (a - e^{2 \cdot x})}{(a + e^{2 \cdot x})^2}$$

Waagrechte Tangente: $a - e^{2 \cdot x} = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \dfrac{\ln(a)}{2}$ existiert, falls $a > 0$.

Sei $a > 0$:

$x = \ln(\sqrt{a})$

Zähler	**pos**	**neg**
Nenner	**pos**	**pos**
f '(x)	**pos**	**neg**
G_f	**sms**	**smf**
	HP	

G_f ist streng monoton steigend in $x \in \left]-\infty ; \ln(\sqrt{a})\right]$.

G_f ist streng monoton fallend in $x \in \left[\ln(\sqrt{a}) ; \infty\right[$.

$$f\left(\frac{\ln(a)}{2}\right) = \frac{2 \cdot e^{\ln(\sqrt{a})}}{a + e^{2 \cdot \ln(\sqrt{a})}} = \frac{2 \cdot \sqrt{a}}{a + a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$HP\left(\ln(\sqrt{a}), \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph von f_a symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $\mathbf{x = \ln(\sqrt{a})}$ verläuft.

Koordinatentransformation: $\quad x = \ln(\sqrt{a}) + u \qquad y = v$

$$v(u) = \frac{2 \cdot e^{\ln(\sqrt{a})+u}}{a + e^{2\cdot(\ln(\sqrt{a})+u)}} = \frac{2 \cdot e^{u} \cdot \sqrt{a}}{a + e^{2\cdot u} \cdot a} = \frac{2 \cdot e^{u} \cdot \sqrt{a}}{a \cdot (1 + e^{2\cdot u})} = \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{u}}{1 + e^{2\cdot u}}$$

$$v(-u) = \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{-u}}{1 + e^{-(2\cdot u)}} = \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{-u}}{1 + e^{-(2\cdot u)}} \cdot \frac{e^{(2\cdot u)}}{e^{(2\cdot u)}} = \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{u}}{e^{2\cdot u} + 1} = v(u)$$

Teilaufgabe 2

Gegeben ist nun die Funktion g mit $g(x) := \dfrac{\ln(x)}{2\cdot\sqrt{x}}$ mit der Definitionsmenge $D_g =]\ 0\ ;\ \infty\ [$.

Teilaufgabe 2.1 (11 BE)

Bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten und die Art und die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von g und geben Sie die Wertemenge von g an.

[mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{4\cdot x \cdot\sqrt{x}}$]

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overset{\infty\ \uparrow}{\ln(x)}}{\underset{\downarrow\ \infty}{2\cdot\sqrt{x}}} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(x^{-\frac{1}{2}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0$$

waagrechte Asymptote: $\quad y = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{-\infty\ \uparrow}{\ln(x)}}{\underset{\downarrow\ 0}{2\cdot\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \left(\underset{\downarrow\ \infty}{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}} \cdot \overset{-\infty\ \uparrow}{\ln(x)} \right) = -\infty$$

senkrechte Asymptote: $\quad x = 0$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot 2\cdot\sqrt{x} - \ln(x)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}}{4\cdot x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}}{4\cdot x} = \frac{2-\ln(x)}{4\cdot x\cdot\sqrt{x}}$$

Waagrechte Tangente: $2 - \ln(x) = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow e^2$

$y0 := -20 .. 10$

		$x \neq 0$	$x = e^2$	
Zähler	n.d.	pos		neg
Nenner	n.d.	pos		pos
g '(x)	n.d.	pos		neg
G_g	n.d.	sms		smf
			HP	

$g\left(e^2\right) = e^{-1} = 0.368$

$HP\left(e^2, \frac{1}{e}\right)$

Wertemenge: $W = \left]-\infty ; \frac{1}{e}\right]$

Teilaufgabe 2.2 **(7 BE)**

Gegeben ist weiter die Integralfunktion G durch $G(x) = \int_1^x g(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_G = D_g$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von G.

$$G(x) := \int_1^x \frac{\ln(t)}{2\cdot\sqrt{t}}\,dt$$

$u(t) = \ln(t)$ $\qquad$ $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{2}\cdot t^{\frac{-1}{2}}$ $\qquad$ $v(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{-1}{2}+1}\cdot t^{\frac{-1}{2}+1} = t^{\frac{1}{2}}$

$$\int \frac{\ln(t)}{2\cdot\sqrt{t}}\,dt = \ln(t)\cdot\sqrt{t} - \int \frac{1}{t}\cdot t^{\frac{1}{2}}\,dt = \ln(t)\cdot\sqrt{t} - \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \ln(t)\cdot\sqrt{t} - \frac{1}{\frac{-1}{2}+1}\cdot t^{\frac{1}{2}}$$

$$= \ln(t)\cdot\sqrt{t} - 2\cdot\sqrt{t}$$

$$G(x) = \ln(x)\cdot\sqrt{x} - 2\cdot\sqrt{x} - \ln(1)\cdot 1 + 2 = \ln(x)\cdot\sqrt{x} - 2\cdot\sqrt{x} + 2$$

Wendestelle von G entspricht Extremstelle von g:

$G\left(e^2\right) = 2\cdot e - 2\cdot e + 2 = 2$ Wendepunkt: **W(e^2 / 2)**

Teilaufgabe 2.3 **(7 BE)**
Die Funktion h ist festgelegt durch $h(x) = \arccos(g(x))$, $D_h = [\ 0.5\ ;\ \infty\ [$. Untersuchen Sie, ob die Funktion h Nullstellen besitzt. Bestimmen Sie außerdem für den Graphen von h das Monotonieverhalten und die Art und die Koordinaten der Extrempunkte.

$g(x) = 1$

Nach 2.1: $g(x) \le \frac{1}{e}$ es gibt also keine Nullstelle.

$$h'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (g(x))^2}}\cdot g'(x)$$

Das Vorzeichen von $h'(x)$ entspricht dem Vorzeichen von $-g'(x)$.

G_h ist streng monoton fallend in $x \in [\ \frac{1}{2}\ ;\ e^2\ ]$.

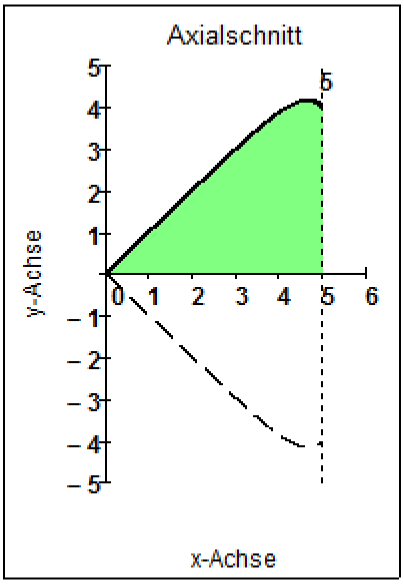
G_h ist streng monoton steigend in $x \in [\ e^2\ ;\ \infty\ [$.

Tiefpunkt: $h\left(e^2\right) = \operatorname{acos}\left(e^{-1}\right) = 1.194$

Hochpunkt: $h\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \operatorname{acos}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\ln(2)\right) = 2.083$

Teilaufgabe 3 (7 BE)
Für eine Zaunkonstruktion werden für die Standsäulen Kronenabschlüsse benötigt.

Der Graph der Funktion k mit $k(x) = x - e^{2\cdot x - 10}$ bildet die obere Kontur einer solchen zwiebelförmigen Säulenkrönung, die durch Rotation des Graphen von k um die positive x-Achse entsteht (siehe nebenstehende Graphik).
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers, wenn seine Höhe 5 LE beträgt.
Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle.



$$V = \pi\cdot\int_0^5 (k(x))^2\,dx$$

$$\int \left(x - e^{4\cdot x - 20}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - 2\cdot x\cdot e^{2\cdot x-10} + e^{4\cdot x-20}\right) dx$$

Nebenrechnung. $$\int 2\cdot x\cdot e^{2\cdot x-10}\,dx = 2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x-10} - \int 2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x-10}\,dx$$

$$= x\cdot e^{2\cdot x-10} - \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x-10}$$

$u(x) = 2\cdot x$ $\qquad$ $u'(x) = 2$

$v'(x) = e^{2\cdot x-10}$ $\qquad$ $v(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x-10}$

$$\int \left(x - e^{2\cdot x-10}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\cdot x^3 - x\cdot e^{2\cdot x-10} + \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x-10} + \frac{1}{4}\cdot e^{4\cdot x-20}$$

$$V := \pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 5^3 - 5\cdot e^0 + \frac{1}{2}\cdot e^0 + \frac{1}{4}\cdot e^0\right) - \pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 - 0\cdot e^{-10} + \frac{1}{2}\cdot e^{-10} + \frac{1}{4}\cdot e^{-20}\right)$$

$$V = \frac{449\cdot\pi}{12} - \pi\cdot\left(\frac{e^{-10}}{2} + \frac{e^{-20}}{4}\right) = 117.5$$

Teilaufgabe 4 (9 BE)

Gegeben ist die separierbae Differenzialgleichung $y'\cdot\left(x^2-1\right) = (x-3)\cdot\frac{y^2+2}{2\cdot y}$ mit $x > 1$ und $y > 0$.

Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung, deren Graph durch den Punkt **P(2 / $\sqrt{7}$)** verläuft.

$$y'\cdot\left(x^2-1\right) = (x-3)\cdot\frac{y^2+2}{2\cdot y} \qquad y'\cdot\frac{2\cdot y}{y^2+2} = \frac{x-3}{x^2-1}$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{2\cdot y}{y^2+2} = \frac{x-3}{x^2-1} \qquad \int \frac{2\cdot y}{y^2+2}\,dy = \int \frac{x-3}{x^2-1}\,dx$$

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A\cdot(x+1) + B(x-1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)\cdot x + A - B}{x^2-1}$$

Koeffizientenvergleich: $\quad A + B = 1 \qquad A - B = -3$

$$2\cdot A = -2 \qquad A = -1 \qquad B = 2$$

$$\int \frac{x-3}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1}\right) dx = -\ln\left(|x-1|\right) + 2\cdot\ln\left(|x+1|\right)$$

Betrag kann weg gelassen werden, da $x < 1$:

$$-\ln\left(|x-1|\right) + 2\cdot\ln\left(|x+1|\right) = \ln\left[\frac{(x+1)^2}{x-1}\right]$$

$$\ln\left(y^2+2\right) = \ln\left[\frac{(x+1)^2}{x-1}\right] + k$$

$$y^2 + 2 = \frac{(x+1)^2}{x-1}\cdot e^k = K\cdot\frac{(x+1)^2}{x-1}$$

Allgemeine Lösung: $\quad y_a(x) = \sqrt{K\cdot\frac{(x+1)^2}{x-1} - 2}$

Spezielle Lösung.

$$\sqrt{7} = \sqrt{K\cdot\frac{(2+1)^2}{2-1} - 2} = \sqrt{9\cdot K - 2} \qquad 7 = 9\cdot K - 2 \qquad K = 1 \qquad y_s(x) := \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x-1} - 2}$$