Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = \dfrac{2 \cdot e^x}{a + e^{2 \cdot x}}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

Bestimmen Sie D_{f_a} in Abhängigkeit von a sowie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern von D_{f_a}.

$x_d(a) := a + e^{2 \cdot x} = 0$ auflösen, $x \rightarrow \dfrac{\ln(-a)}{2}$

$x_d(a) = \dfrac{\ln(-a)}{2}$ oder: $x_d = \ln\left(\sqrt{-a}\right)$

$a > 0$ $\quad D_{f_a} = \mathbb{R}$

$a < 0$ $\quad D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\ln(-a)}{2} \right\}$

$f(x,a) := \dfrac{2 \cdot e^x}{a + e^{2 \cdot x}}$

$\lim_{x \to \infty} f(x,a) \rightarrow 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x,a) \rightarrow 0$

Für a < 0:

$\lim_{x \to x_d(a)^-} f(x,a)$ annehmen, $a < 0 \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \to x_d(a)^+} f(x,a)$ annehmen, $a < 0 \rightarrow \infty$

Im Folgenden gilt nun a > 0.

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)
Ermitteln Sie **ohne CAS** das Monotonieverhalten des Graphen von f_a sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f_a .

[Teilergebnis: $\mathbf{f'_a(x)} = \dfrac{2 \cdot e^{x} \cdot \left(a - e^{2 \cdot x}\right)}{\left(a + e^{2 \cdot x}\right)^2}$]

$$f'_a(x) = \frac{2 \cdot e^{x} \cdot \left(a + e^{2 \cdot x}\right) - 2 \cdot e^{x} \cdot 2 \cdot e^{2 \cdot x}}{\left(a + e^{2 \cdot x}\right)^2} = \frac{2 \cdot a \cdot e^{x} + 2 \cdot e^{3 \cdot x} - 4 \cdot e^{3 \cdot x}}{\left(a + e^{2 \cdot x}\right)^2} = \frac{2 \cdot a \cdot e^{x} - 2 \cdot e^{3 \cdot x}}{\left(a + e^{2 \cdot x}\right)^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{2 \cdot e^{x} \cdot \left(a - e^{2 \cdot x}\right)}{\left(a + e^{2 \cdot x}\right)^2}$$

Waagrechte Tangente: $a - e^{2 \cdot x} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \dfrac{\ln(a)}{2}$ existiert, falls $a > 0$.

Sei $a > 0$: $x = \dfrac{\ln(a)}{2}$

	$x < \frac{\ln(a)}{2}$	$x > \frac{\ln(a)}{2}$
Zähler	**pos**	**neg**
Nenner	**pos**	**pos**
f '(x)	**pos**	**neg**
G_f	**sms**	**smf**

HP

Kontrolle:

$$a - e^{2 \cdot x} > 0 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a > 0 \end{array} \right. \rightarrow x < \frac{\ln(a)}{2}$$

$$a - e^{2 \cdot x} < 0 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a > 0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{\ln(a)}{2} < x$$

G_f ist streng monoton steigend in $x \in \left] -\infty ; \dfrac{\ln(a)}{2} \right]$.

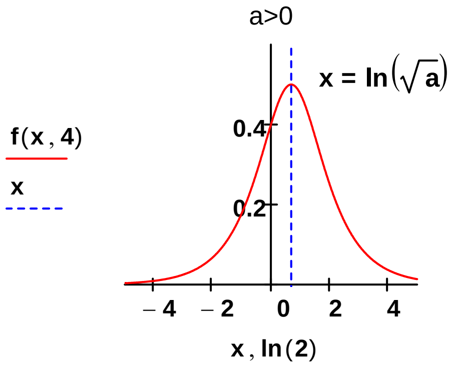
G_f ist streng monoton fallend in $x \in \left[\dfrac{\ln(a)}{2} ; \infty \right[$.

$$f\left(\frac{\ln(a)}{2}\right) = \frac{2 \cdot e^{\ln\left(\sqrt{a}\right)}}{a + e^{2 \cdot \ln\left(\sqrt{a}\right)}} = \frac{2 \cdot \sqrt{a}}{a + a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$HP\left(\frac{\ln(a)}{2}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE) mit CAS
Zeigen Sie, dass der Graph von f_a achsensymmetrisch ist und geben Sie die Gleichung der Symmetrieachse an.

$$f(x,a) := \frac{2 \cdot e^{x}}{a + e^{2 \cdot x}}$$



Da bei $x = \ln(\sqrt{a})$ der einzige Extrempunkt liegt, muss hier die gesuchte Achse liegen.

Symmetrieachse:

$$x = \ln(\sqrt{a})$$

$$f(\ln(\sqrt{a}) + u, a) - f(\ln(\sqrt{a}) - u, a) \text{ vereinfachen } \rightarrow 0$$

oder:

Koordinatentransformation: $x = \ln(\sqrt{a}) + u$ $\quad$ $y = v$

$$f\_(u,a) := f(\ln(\sqrt{a}) + u, a) \rightarrow \frac{2 \cdot e^{u + \ln(\sqrt{a})}}{a + e^{2 \cdot u + 2 \cdot \ln(\sqrt{a})}}$$

$$f\_(-u,a) - f\_(u,a) \text{ vereinfachen } \rightarrow 0$$

Teilaufgabe 2

Gegeben ist nun die Funktion g mit $g(x) := \frac{\ln(x)}{2\cdot\sqrt{x}}$ mit der Definitionsmenge $D_g =]\,0\,;\ \infty\,[$.

Teilaufgabe 2.1 (11 BE)

Bestimmen Sie **ohne CAS** die Gleichungen der Asymptoten und die Art und die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von g und geben Sie die Wertemenge von g an.

[mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \frac{2 - \ln(x)}{4\cdot x\cdot\sqrt{x}}$]

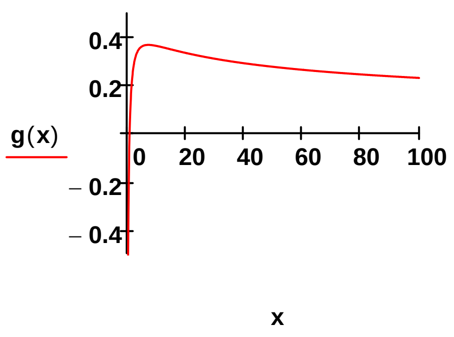
L'Hosp.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\infty\ \uparrow}{\ln(x)}}{\underset{\downarrow\ \infty}{2\cdot\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x^{\frac{-1}{2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$$

waagrechte Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{-\infty\ \uparrow}{\ln(x)}}{\underset{\downarrow\ 0}{2\cdot\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\left(\underset{\downarrow\ \infty}{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}\cdot\overset{-\infty\ \uparrow}{\ln(x)}\right) = -\infty$$

senkrechte Asymptote: $x = 0$



$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot 2\cdot\sqrt{x} - \ln(x)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}}{4\cdot x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}}{4\cdot x} = \frac{2 - \ln(x)}{4\cdot x\cdot\sqrt{x}}$$

Waagrechte Tangente: $2 - \ln(x) = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow e^2$

$y0 := -20 .. 10$

		$x \neq 0$	$x = e^2$
Zähler	n.d.	pos	neg
Nenner	n.d.	pos	pos
g '(x)	n.d.	pos	neg
G_g	n.d.	sms	smf

HP

Kontrolle:

$2 - \ln(x) > 0$ **auflösen**, $x \rightarrow 0 < x < e^2$

$2 - \ln(x) < 0$ **auflösen**, $x \rightarrow e^2 < x$

$g\left(e^2\right) = e^{-1} = 0.368$ HP$\left(e^2, \frac{1}{e}\right)$

Wertemenge: $W =]\, -\infty ; \frac{1}{e}\,]$

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)

Gegeben ist weiter die Integralfunktion G durch $G(x) = \int_1^x g(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_G = D_g$. Ermitteln Sie **ohne CAS** die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von G.

$$G(x) := \int_1^x \frac{\ln(t)}{2\cdot\sqrt{t}}\,dt$$

$u(t) = \ln(t)$ $\qquad$ $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $v(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{-1}{2}+1}\cdot t^{-\frac{1}{2}+1} = t^{\frac{1}{2}}$

$$\int \frac{\ln(t)}{2\cdot\sqrt{t}}\,dt = \ln(t)\cdot\sqrt{t} - \int \frac{1}{t}\cdot t^{\frac{1}{2}}\,dt = \ln(t)\cdot\sqrt{t} - \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \ln(t)\cdot\sqrt{t} - \frac{1}{\frac{-1}{2}+1}\cdot t^{\frac{1}{2}}$$

$$= \ln(t)\cdot\sqrt{t} - 2\cdot\sqrt{t}$$

$$G(x) = \ln(x)\cdot\sqrt{x} - 2\cdot\sqrt{x} - \ln(1)\cdot 1 + 2 = \ln(x)\cdot\sqrt{x} - 2\cdot\sqrt{x} + 2$$

Wendestelle von G entspricht Extremstelle von g:

$G\left(e^2\right) = 2\cdot e - 2\cdot e + 2 = 2$ $\qquad$ Wendepunkt: **W(e^2 / 2)**

Teilaufgabe 2.3 (7 BE)
Die Funktion h ist festgelegt durch $h(x) = \arccos(g(x))$, $D_h = [\ 0.5\ ;\ \infty\ [$. **Begründen** Sie, ob die Funktion h Nullstellen besitzt. Bestimmen Sie außerdem für den Graphen von h das Monotonieverhalten und die Art und die Koordinaten der Extrempunkte.

$$h(x) := \operatorname{acos}\left(\frac{\ln(x)}{2\cdot\sqrt{x}}\right)$$

$$g(x) = 1$$

Nach 2.1: $g(x) \le \frac{1}{e}$ es gibt also keine Nullstelle.

oder:

$h(x) = 0$ auflösen, x $\rightarrow -1.6869916665769790383 + 0.85083361301938757391i$ komplex

$$h'(x) := \frac{d}{dx}h(x) \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{\ln(x) - 2}{2\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{4 - \frac{\ln(x)^2}{x}}}$$

Vorzeichen entscheidet der Zähler.

$h'(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) - 2 \ge 0 \;\Big|\; \text{auflösen}, x;\ \text{annehmen}, x \ge 0.5 \rightarrow e^2 \le x$

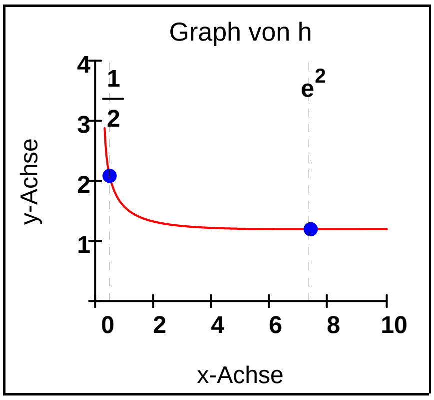
$h'(x) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) - 2 \le 0 \;\Big|\; \text{auflösen}, x;\ \text{annehmen}, x \ge 0.5 \rightarrow 0.5 \le x \le e^2$

G_h ist streng monoton fallend in $x \in [\ \frac{1}{2}\ ;\ e^2\ ]$.

G_h ist streng monoton steigend in $x \in [\ e^2\ ;\ \infty\ [$.

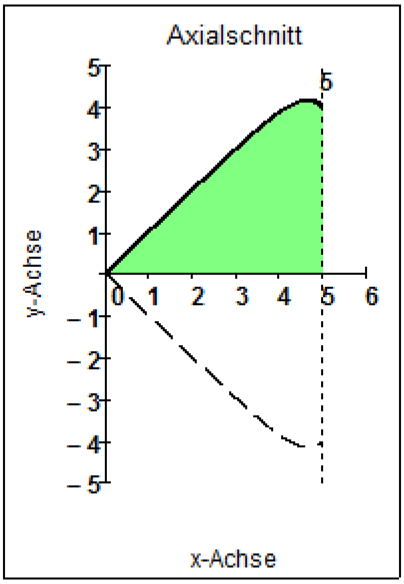
Tiefpunkt: $h\left(e^2\right) = \operatorname{acos}\left(e^{-1}\right) = 1.194$

Hochpunkt: $h\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \operatorname{acos}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\ln(2)\right) = 2.083$



Teilaufgabe 3 **(7 BE)**
Für eine Zaunkonstruktion werden für die Standsäulen Kronenabschlüsse benötigt.

Der Graph der Funktion k mit $\mathbf{k(x) = x - e^{2\cdot x - 10}}$ bildet die obere Kontur einer solchen zwiebelförmigen Säulenkrönung, die durch Rotation des Graphen von k um die positive x-Achse entsteht (siehe nebenstehende Graphik).
Berechnen Sie **ohne CAS** das Volumen des Rotationskörpers, wenn seine Höhe 5 LE beträgt.
Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle.



$$V = \pi\cdot\int_0^5 (k(x))^2\,dx$$

$$\int \left(x - e^{2\cdot x-10}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - 2\cdot x\cdot e^{2\cdot x-10} + e^{4\cdot x-20}\right) dx$$

Nebenrechnung. $\displaystyle\int 2\cdot x\cdot e^{2\cdot x-10}\,dx = 2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x-10} - \int 2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x-10}\,dx$

$$= x\cdot e^{2\cdot x-10} - \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x-10}$$

$u(x) = 2\cdot x \qquad u'(x) = 2$

$v'(x) = e^{2\cdot x-10} \qquad v(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x-10}$

$$\int \left(x - e^{2\cdot x-10}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\cdot x^3 - x\cdot e^{2\cdot x-10} + \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x-10} + \frac{1}{4}\cdot e^{4\cdot x-20}$$

$$V := \pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 5^3 - 5\cdot e^0 + \frac{1}{2}\cdot e^0 + \frac{1}{4}\cdot e^0\right) - \pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 - 0\cdot e^{-10} + \frac{1}{2}\cdot e^{-10} + \frac{1}{4}\cdot e^{-20}\right)$$

$$V = \frac{449\cdot\pi}{12} - \pi\cdot\left(\frac{e^{-10}}{2} + \frac{e^{-20}}{4}\right) = 117.5$$

Teilaufgabe 4 **(9 BE)**

Gegeben ist die separierbae Differenzialgleichung $y'\cdot\left(x^2-1\right)=(x-3)\cdot\frac{y^2+2}{2\cdot y}$ mit $x>1$ und $y>0$.

Bestimmen Sie **ohne CAS** die Lösung der Differenzialgleichung, deren Graph durch den Punkt **P(2 / $\sqrt{7}$)** verläuft.

$$y'\cdot\left(x^2-1\right)=(x-3)\cdot\frac{y^2+2}{2\cdot y} \qquad y'\cdot\frac{2\cdot y}{y^2+2}=\frac{x-3}{x^2-1}$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{2\cdot y}{y^2+2}=\frac{x-3}{x^2-1} \qquad \int\frac{2\cdot y}{y^2+2}\,dy=\int\frac{x-3}{x^2-1}\,dx$$

$$\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A\cdot(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}=\frac{(A+B)\cdot x+A-B}{x^2-1}$$

Koeffizientenvergleich: $A+B=1$ $\qquad A-B=-3$

$2\cdot A=-2 \qquad A=-1 \qquad B=2$

$$\int\frac{x-3}{x^2-1}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)dx=-\ln(|x-1|)+2\cdot\ln(|x+1|)$$

Betrag kann weg gelassen werden, da $x<1$: $\quad -\ln(|x-1|)+2\cdot\ln(|x+1|)=\ln\left[\frac{(x+1)^2}{x-1}\right]$

$$\ln\left(y^2+2\right)=\ln\left[\frac{(x+1)^2}{x-1}\right]+k$$

$$y^2+2=\frac{(x+1)^2}{x-1}\cdot e^k=K\cdot\frac{(x+1)^2}{x-1}$$

Allgemeine Lösung: $\quad y_a(x)=\sqrt{K\cdot\frac{(x+1)^2}{x-1}-2}$ $\qquad$ da $y>0$ nach Vors.

$$\sqrt{7}=\sqrt{K\cdot\frac{(2+1)^2}{2-1}-2}=\sqrt{9\cdot K-2} \qquad 7=9\cdot K-2 \qquad K=1$$

Spezielle Lösung. $\quad y_s(x):=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x-1}-2}$