Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 13 Technik - A II - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = 2\cdot\arctan\left(\frac{x^2 - a}{x^2 + a}\right)$ mit der in IR maximalen Definitionsmenge D_{f_a} und $a \in IR \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

Bestimmen Sie D_{f_a} in Abhängigkeit von a, das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$. Berechnen Sie auch die Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

$$x^2 + a = 0 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen}, a = -b \\ \text{auflösen}, x \\ \text{ersetzen}, b = -a \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-a} \\ -\sqrt{-a} \end{pmatrix}$$

$a < 0$: $D_{f_a} = IR \setminus \{-\sqrt{-a}\,;\sqrt{-a}\,\}$

$a > 0$: $D_{f_a} = IR$

$$f_a(-x) = 2\cdot\arctan\left[\frac{(-x)^2 - a}{(-x)^2 + a}\right] = 2\cdot\arctan\left(\frac{x^2 - a}{x^2 + a}\right) = f_a(x) \qquad \Rightarrow$$ Achensymmetrie y-Achse

$$\lim_{x \to -\infty}\left(2\cdot\arctan\left(\frac{x^2 - a}{x^2 + a}\right)\right) = 2\cdot\arctan(1) = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(2\cdot\arctan\left(\frac{x^2 - a}{x^2 + a}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$ wegen Achsensymmetrie

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - a}{x^2 + a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - a = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

$a < 0$ keine Nullstellen

$a > 0$ $x_1 = -\sqrt{a}$ $x_2 = \sqrt{a}$

Teilaufgabe 1.2 (11 BE)
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes in Abhängigkeit von a.
[Teilergebnis: $f'_a(x) = \frac{4 \cdot a \cdot x}{x^4 + a^2}$]

$$f'_a(x) = \frac{2}{1 + \left(\frac{x^2 - a}{x^2 + a}\right)^2} \cdot \frac{2 \cdot x \cdot \left(x^2 + a\right) - \left(x^2 - a\right) \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2 + a\right)^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{2 \cdot \left(x^2 + a\right)^2}{\left(x^2 + a\right)^2 + \left(x^2 - a\right)^2} \cdot \frac{2 \cdot x^3 + 2 \cdot a \cdot x - 2 \cdot x^3 + 2 \cdot a \cdot x}{\left(x^2 + a\right)^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{2}{x^4 + 2 \cdot a \cdot x^2 + a^2 + x^4 - 2 \cdot a \cdot x^2 + a^2} \cdot \frac{4 \cdot a \cdot x}{1}$$

$$f'_a(x) = \frac{2}{2 \cdot x^4 + 2 \cdot a^2} \cdot \frac{4 \cdot a \cdot x}{1} = \frac{4 \cdot a \cdot x}{x^4 + a^2}$$

$a < 0$ $\quad G_{f_a}$ ist streng mon. steigend in $]-\infty ; -\sqrt{-a}[$, streng mon. steigend in $]-\sqrt{-a} ; 0]$, streng monoton fallend in $[0 ; \sqrt{-a}[$ und streng monoton fallend $]\sqrt{-a} ; \infty[$.

Hochpunkt $\quad H\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$

$a > 0$ $\quad G_{f_a}$ ist streng mon. fallend in $]-\infty ; 0]$ und streng mon. steigend in $0 ; \infty[$

Tiefpunkt $\quad T\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$

Gegeben ist weiter die Integralfunktion g mit $g(x) = \int_0^x \frac{16 \cdot t}{t^4 + 16}\, dt$ und der Definitionsmenge $D_g = IR$

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Zeigen Sie durch Integration, dass sich g(x) schreiben lässt in der Form $g(x) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)$.

$$\int \frac{16 \cdot t}{t^4 + 16}\, dt = \int \frac{8}{z^2 + 16}\, dz = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \arctan\left(\frac{z}{4}\right) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{t^2}{4}\right)$$

Substitution: $z = t^2$ $\qquad \frac{dz}{dt} = 2 \cdot t$ $\qquad dt = \frac{dz}{2 \cdot t}$

$$\Rightarrow \quad g(x) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{x^2}{4}\right) - 2 \cdot \arctan(0) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

Teilaufgabe 1.4 (7 BE)

Begründen Sie, dass sich die Funktionen f_4 und **g** nur um eine additive Konstante unterscheiden, und berechnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von g an und zeichnen Sie den Graphen für den Bereich $-5 \le x \le 5$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte (1 LE = 1 cm; Platzbedarf für 1.5; $y \ge -5$).

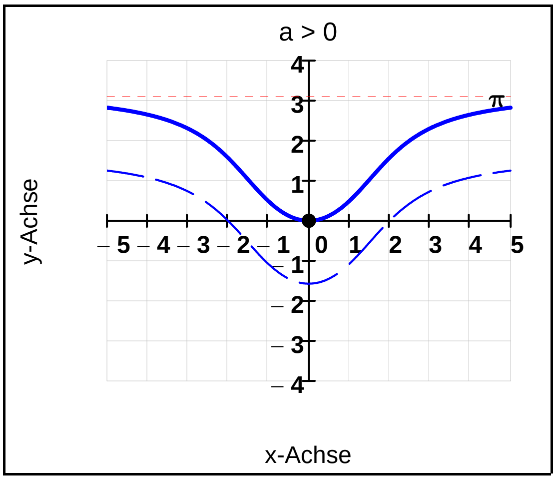
$$f_4(x) := 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}\right) \qquad f'_4(x) := \frac{d}{dx} f_4(x) = \frac{16 \cdot x}{x^4 + 16}$$

$$g(x) := 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{x^2}{4}\right) \qquad g'(x) := \frac{d}{dx} g(x) = \frac{x}{\frac{x^4}{16} + 1} = \frac{16 \cdot x}{x^4 + 16}$$

$g(x) = f_4(x) + C \qquad g(0) = 0$

$2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{0 - 4}{0 + 4}\right) + C = 0 \qquad 2 \cdot \operatorname{atan}(-1) = -\frac{\pi}{2} \qquad C = \frac{\pi}{2}$

$$g(x) = f_4(x) + \frac{\pi}{2}$$



G_g entsteht durch Verschiebung von G_f nach oben um C:

g besitzt den Tiefpunkt T(0/0)

Teilaufgabe 1.5 **(7 BE)**
Begründen Sie, dass die Funktion g für $x \le 0$ umkehrbar ist und ermitteln Sie einen Term der zugehörigen Umkehrfunktion h. Geben Sie auch die Definitionsmenge von h an. Zeichnen Sie den Graph von h in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.4 ein.

G_g ist für $x \le 0$ streng monoton fallend, also umkehrbar.

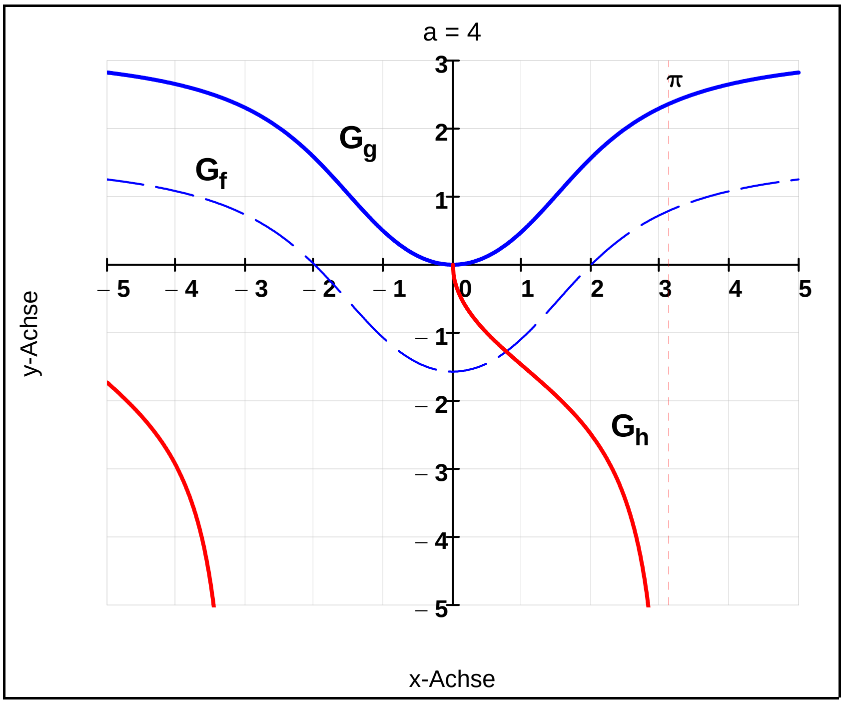
Waagrechte Tangente: $y = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ $\quad W_g = [\,0\,;\ \pi\,[$

$y = 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{x^2}{4}\right)$ $\quad x = 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{y^2}{4}\right)$ $\quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{y^2}{4}$

$y_1 = 2 \cdot \sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\quad y_2 = -2 \cdot \sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\quad$ Lösung, da $W_h = D_g$

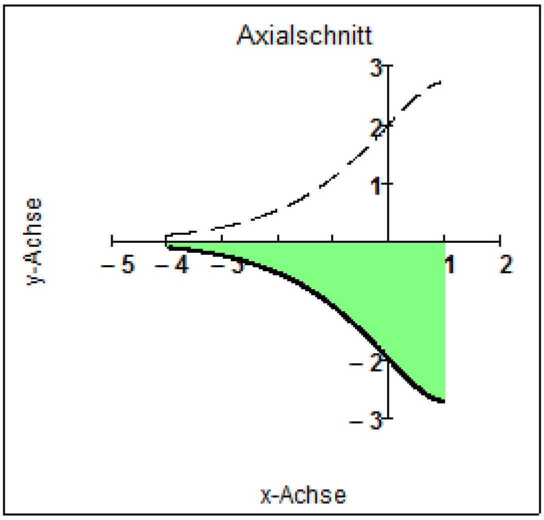
$$h(x) := -2 \cdot \sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$D_h = [\,0\,;\ \pi\,[$$


a = 4
π
G_g
G_f
G_h
y-Achse
x-Achse
– 5
– 4
– 3
– 2
– 1
0
1
2
3
4
5
3
2
1
– 1
– 2
– 3
– 4
– 5

Teilaufgabe 2
Die Mantelfläche eines drehsymmetrischen Glaskelchs entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion k mit

$k(x) = (x-2)\cdot e^x$, $D_k = [\,-4\,;\,1\,]$ um die x-Achse. Der Graph von k sowie sein Spiegelbild sind nebenstehender Skizze zu entnehmen. Der Kelch wird anschließend bei $x = -4$ senkrecht verschlossen, aufgestellt und mit einem Ständer versehen.
Bei allen Rechnungen soll die Wandstärke des Kelchs vernachlässigt werden. Runden Sie alle Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.



Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Kelchs.

$$V = \pi\cdot\int_{-4}^{1}\left[(x-2)\cdot e^x\right]^2\,dx$$

$$K(x) = \int\left[(x-2)\cdot e^x\right]^2\,dx = \int (x-2)^2\cdot e^{2\cdot x}\,dx$$

$u(x) = (x-2)^2$ $\qquad u'(x) = 2\cdot(x-2)$

$v'(x) = e^{2\cdot x}$ $\qquad v(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}$

$$K(x) = (x-2)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} - \int (x-2)\cdot e^{2\cdot x}\,dx$$

$u(x) = x-2$ $\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{2\cdot x}$ $\qquad v(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}$

$$K(x) = (x-2)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} - (x-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} + \int\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}\,dx$$

$$K(x) := (x-2)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} - (x-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} + \frac{1}{4}\cdot e^{2\cdot x}$$

$V := \pi\cdot(K(1) - K(-4))$ $\qquad V = \pi\cdot\left(\frac{5\cdot e^2}{4} - \frac{85\cdot e^{-8}}{4}\right) = 28.994$ $\qquad V = 29.0$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Die Maßzahl des Volumens der Flüssigkeit im Kelch bis zur Stelle x lässt sich näherungsweise darstellen durch $V(x) := \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot e^{2\cdot x}\cdot\left(2\cdot x^2 - 10\cdot x + 13\right)$ (Nachweis nicht erforderlich).
Bestimmen Sie den Wert x, bei dem die Maßzahl des Volumens der Flüssigkeit 15 Volumeneinheiten beträgt, mit einem Näherungsschritt des Newton-Verfahrens mit Startwert x = 1.
Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

$$V(x) = 15 \qquad \Leftrightarrow \qquad D(x) := V(x) - 15 \rightarrow \frac{\pi\cdot e^{2\cdot x}\cdot\left(2\cdot x^2 - 10\cdot x + 13\right)}{4} - 15$$

$$D'(x) := \frac{d}{dx}D(x) = \frac{\pi\cdot e^{2\cdot x}\cdot(4\cdot x - 10)}{4} + \frac{\pi\cdot e^{2\cdot x}\cdot\left(2\cdot x^2 - 10\cdot x + 13\right)}{2} = \pi\cdot e^{2\cdot x}\cdot(x-2)^2$$

$$x_0 := 1 \qquad D\left(x_0\right) = 14.017 \qquad D'\left(x_0\right) = 23.213$$

$$x_1 := x_0 - \frac{D\left(x_0\right)}{D'\left(x_0\right)} \qquad x_1 = 0.396 \qquad x_1 = 0.40$$

Teilaufgabe 3 (11 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$y' + \frac{2\cdot x + 1}{x+1}\cdot y = \left(x^2 - 1\right)\cdot e^x$ mit $x > -1$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

Inhomogene DGL: $$y' + \frac{2\cdot x + 1}{x+1}\cdot y = \left(x^2 - 1\right)\cdot e^x$$

Homogene DGL: $$y' + \frac{2\cdot x + 1}{x+1}\cdot y = 0$$

Triviale Lösung: $$y = 0$$

Differentialquotient: $$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{2\cdot x + 1}{x+1}\cdot y\right)$$

Trennen der Variablen: $$\frac{dy}{y} = -\left(\frac{2\cdot x + 1}{x+1}\right)\cdot dx$$

Integration: $$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\left(\frac{2\cdot x + 1}{x+1}\right)dx \qquad -\left(\frac{2\cdot x + 1}{x+1}\right) \text{ parfrac } \rightarrow \frac{1}{x+1} - 2$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x+1} - 2\,dx + k \rightarrow \ln(y) = k - 2\cdot x + \ln(x+1)$$

Delogarithmieren: $|y| = e^{\ln(x+1)-2\cdot x+k} = e^{\ln(x+1)}\cdot e^{-2\cdot x}\cdot e^{k}$

1. Fall: $y = (x+1)\cdot e^{-2\cdot x}\cdot K_1$ mit $K_1 = e^{k} > 0$

2. Fall: $y = (x+1)\cdot e^{-2\cdot x}\cdot K_2$ mit $K_2 = -e^{k} < 0$

mit trivialer Lösung: $y_h(x) = K\cdot(x+1)\cdot e^{-2\cdot x}$ mit $K \in IR$

Variation der Konstanten: $y_p(x) = K(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2\cdot x}$

Ableitungsfunktion: $y'_p(x) = K'(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2\cdot x} + K(x)\cdot\left[1\cdot e^{-2\cdot x} + (x+1)\cdot(-2)\cdot e^{-2\cdot x}\right]$

Vereinfachen: $y'_p(x) = K'(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2\cdot x} + K(x)\cdot\left[(-2\cdot x - 1)\cdot e^{-2\cdot x}\right]$

Einsetzen in DGL: $y' + \frac{2\cdot x+1}{x+1}\cdot y = \left(x^2-1\right)\cdot e^{x}$

$$K'(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2\cdot x} + K(x)\cdot\left[(-2\cdot x-1)\cdot e^{-2\cdot x}\right] + \frac{2\cdot x+1}{x+1}\cdot\left[K(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2\cdot x}\right] = \left(x^2-1\right)\cdot e^{x}$$

Vereinfachen: $K'(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2\cdot x} = \left(x^2-1\right)\cdot e^{x}$

$$K'(x) = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x+1}\cdot e^{3\cdot x} = (x-1)\cdot e^{3\cdot x}$$

$$K(x) = \int (x-1)\cdot e^{3\cdot x}\,dx$$

Partielle Int.: $u(x) = x - 1$ $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{3\cdot x}$ $v(x) = \frac{1}{3}\cdot e^{3\cdot x}$

$$K(x) = (x-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3\cdot x} - \int \frac{1}{3}\cdot e^{3\cdot x}\,dx = (x-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3\cdot x} - \frac{1}{9}\cdot e^{3\cdot x} = \left(\frac{1}{3}\cdot x - \frac{4}{9}\right)\cdot e^{3\cdot x}$$

Spezielle Lösung: $$y_p(x) = \left(\frac{1}{3}\cdot x - \frac{4}{9}\right)\cdot e^{3\cdot x}\cdot\left[(x+1)\cdot e^{-2\cdot x}\right] = \frac{1}{9}\cdot\left(3\cdot x^2 - x - 4\right)\cdot e^{x}$$

Nebenrechnung: $$(3\cdot x - 4)\cdot(x+1) \text{ erweitern } \rightarrow 3\cdot x^2 - x - 4$$

Allgemeine Lösung: $$y_A(x) = K\cdot(x+1)\cdot e^{-2\cdot x} + \frac{1}{9}\cdot\left(3\cdot x^2 - x - 4\right)\cdot e^{x}$$