Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung mit CAS**

made with mathcad

Teilaufgabe 1
Eine städtische Leihbibliothek bietet Bücher und DVDs zur Ausleihe an. Erfahrungsgemäß leihen 80% der Besucher (Ereignis B) und 15% DVDs (Ereignis D) aus. 5% der Besucher leihen DVDs, aber keine Bücher aus. Interpretieren Sie die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten für das Verhalten eines zufällig ausgesuchten Besuchers.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse B und D stochastisch unabhängig sind.

Gegeben: $P(B) = 0.80$ $\quad P(D) = 0.15$ $\quad P(\overline{B} \cap D) = 0.05$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & B & \overline{B} & \blacksquare \\ D & 0.10 & 0.05 & 0.15 \\ \overline{D} & 0.70 & 0.15 & 0.85 \\ \blacksquare & 0.80 & 0.20 & 1 \end{pmatrix}$$

$P(B) \cdot P(D) = 0.80 \cdot 0.15 = 0.12$

$P(B \cap D) = 0.10$

$\Rightarrow$ B und D sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
a) ein Besucher, der DVDs ausleiht, kein Buch mitnimmt,
b) ein Besucher, der Bücher ausleiht, auch mindestens eine DVD mitnimmt,
c) unter 40 zufällig ausgewählten Besuchen 31 oder 32 Besucher ein Buch ausleihen.

Teilaufgabe a) $\quad P_D(\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0.05}{0.15} = \dfrac{1}{3}$

Teilaufgabe b) $\quad P_B(D) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(B)} = \dfrac{0.10}{0.80} = \dfrac{1}{8}$

Teilaufgabe c) $\quad P(31 \le X \le 32) = P_c \qquad P_c := \sum_{k=31}^{32} \mathrm{dbinom}(k, 40, 0.8) = 0.29463$

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)
Beim Verlassen werden nacheinander 10 Besucher nach ihrer Ausleihe befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr Besucher als erwartet sowohl Bücher als auch DVDs ausleihen.

Binomialverteilung: $\quad n := 10 \qquad p := 0.10$

Erwartungswert: $\quad \mu := n \cdot p \qquad \mu = 1$

CAS

$P(X > 1) = P(X \ge 2) = P_2 \qquad P_2 := \sum_{k=2}^{10} \mathrm{dbinom}(k, n, p) = 0.264$

oder

CAS

$P(X > 1) = P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = P_1 \qquad P_1 := 1 - \mathrm{pbinom}(1, n, p) = 0.264$

Teilaufgabe 2
Im DVD-Angebot findet sich auch die Fantasyreihe "Barry Kotter". Die Reihe besteht aus fünf verschiedenen DVDs, von denen jeweils drei Exemplare zum Bestand der Leihbibliothek gehören.

Teilaufgabe 2.1 (2 BE)
Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wie diese 15 DVDs nebeneinander aufgestellt werden können, wenn gleiche DVDs nicht unterschieden werden.

15 DVDs, 5 verschiedene DVDs mit jeweils 3 gleichen Exemplaren:

$$\frac{15!}{(3!)^5} = 168168000$$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Derzeit sind 10 dieser DVDs ausgeliehen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Besucher noch alle fünf Teile zusammen ausleihen kann.

Wahrscheinlichkeit, dass von jedem Teil genau 2 ausgeliehen sind: $\frac{\binom{3}{2}^5}{\binom{15}{10}} = 0.08092$

Nebenrechnung: $\frac{(\mathrm{combin}(3,2))^5}{\mathrm{combin}(15,10)} = 0.08092$

oder:

Wahrscheinlichkeit, dass jemand von jedem Teil genau eines ausleiht: $\frac{3^5 \cdot 5!}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = 0.081$

oder:

$\frac{\binom{3}{1}^5}{\binom{15}{10}} = 0.08092$ Nebenrechnung: $\frac{\mathrm{combin}(3,1)^5}{\mathrm{combin}(15,5)} = 0.08092$

Teilaufgabe 3
Vor dem Betreten der Büchersäle müssen Taschen in eines der 100 Schließfächer gesperrt werden. Erfahrungsgemäß nutzen 90% der Besucher diese Schließfächer. Verwenden Sie bei den folgenden Rechnungen die Normalverteilung als Näherung.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Derzeit befinden sich 120 Besucher in der Bibliothek. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Schließfächer ausreichen.

X: Anzahl der Besucher, die ein Schließfach belegen wollen unter $\mathbf{n := 120}$ $\quad$ $\mathbf{p := 0.90}$

$$\mathbf{P(X \le 100) = F(100) = P_{100}} \qquad \mathbf{P_{100} := pbinom(100, n, p) = 0.01577}$$

Teilaufgabe 3.2 (7 BE)
Berechnen Sie **ohne CAS**, wie viele Besucher die Bibliothek höchstens gleichzeitig besuchen können, damit die Schließfächer mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% ausreichen.

X: Anzahl der Besucher, die ein Schließfach belegen wollen unter n.

$$\mu = 0.9 \cdot n \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot 0.9 \cdot 0.1} = \sqrt{0.09} \cdot \sqrt{n} = 0.3 \cdot \sqrt{n}$$

$$P(X \le 100) > 0.99 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi\left(\frac{100 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) > 0.99$$

$$\frac{100 - \mu + 0.5}{\sigma} > 2.326 \qquad 100 - 0.9 \cdot n + 0.5 > 2.326 \cdot 0.3 \cdot \sqrt{n}$$

Substitution: $\quad \sqrt{n} = z$

$$0.9 \cdot z^2 + 0.6978 \cdot z - 100.5 < 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 5 \end{array} \right. \rightarrow -10.962 < z < 10.187$$

$$z < 10.187 \qquad z := 10.187$$

Resubstitution: $\quad n := z^2 = 103.775$ $\quad$ abrunden: $\quad (\text{floor}(n)) = 103$

Es dürfen höchstens 103 Besucher sein.

Teilaufgabe 4 (2 BE)
Ein Besucher hält sich durchschnittlich 20 Minuten in der Bibliothek auf. Die Aufenthaltsdauer ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 3 Minuten.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig betrachteter Besucher höchstens 25 Minuten in der Bibliothek verbringt.

$\mu := 20 \qquad \sigma := 3$

CAS

$P(X \leq 25) = \Phi\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right) = P_{25} \qquad P_{25} := \text{pnorm}(25, \mu, \sigma) = 0.95221$

Teilaufgabe 5
In der Vergangenheit lag der Anteil der Besucher, die jünger als 20 Jahre waren, bei mindestens 30%. Die Bibliotheksleitung vermutet, dass jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Besucher jünger als 20 Jahre ist, kleiner als 30% (Gegenhypothese) geworden ist. Um dies zu prüfen wird ein Signifikanztest durchgeführt. Eine Mitarbeiterin befragt 500 Besucher nach ihrem Alter und registriert die Anzahl der Unterzwanzigjährigen.

Teilaufgabe 5.1 (6 BE)
Bestimmen Sie **ohne CAS** den Annahmebereich und den Ablehnungsbereich der Nullhypothese für ein Signifikanzniveau von 2,5%.

Testgröße: X: Anzahl der Besucher unter 20 Jahren unter $n := 500$. $\qquad p := 0.30$

Nullhypothese H_0: $p_0 \geq p \rightarrow p_0 \geq 0.3$

Gegenhypothese H_1: $p_1 < p \rightarrow p_1 < 0.3$

Annahmebereich: $A = \{\, k+1, k+2, \ldots, 500 \,\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\, 0, 1, 2, \ldots, k \,\}$

Erwartungswert: $\mu := n \cdot p = 150$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 10.247$

$P(\overline{A}) \leq 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \leq 0.025$

$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k-\mu+0.5}{\sigma}\right) \leq 0.025 \qquad \Leftrightarrow$

TW $\quad \frac{k-\mu+0.5}{\sigma} \leq -1.960 \qquad k \leq -1.969 \cdot \sigma + \mu - 0.5 \ \text{Gleitkommazahl}, 5 \ \rightarrow k \leq 129.32$

$k_0 := 129.32$ aufrunden: $k := \text{floor}(k_0) = 129$

$\overline{A} = \{\ 0, 1, 2, \ldots, 129\}$ $A = \{\ 130, 131, \ldots, 500\}$

Teilaufgabe 5.2 (4 BE)
Berechnen Sie für diesen Test **ohne CAS** die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn tatsächlich 25% der Besucher jünger als 20 Jahre sind und ab 130 jüngeren Besuchern die Nullhypothese angenommen wird. Verwenden Sie bei der Rechnung die Normalverteilung als Näherung.

$\mu_{neu} := 500 \cdot 0.25 = 125$ $\sigma_{neu} := \sqrt{500 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = 9.682$

$$\beta = P(A) = P(X \geq 130) = 1 - P(X \leq 129) = 1 - \Phi\left(\frac{129 - \mu_{neu} + 0.5}{\sigma_{neu}}\right)$$

$\beta := 1 - \text{pnorm}(129.5, \mu_{neu}, \sigma_{neu}) = 0.32105$