Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1
Bei einer landesweiten Prüfung sind 40% der Prüflinge männlich. Interpretieren Sie im Folgenden diese relativen Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Prüfling männlich ist.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) von 12 zufällig gewählten Prüflingen genau 5 männlich sind.
b) von 7 Prüflingen, die zufällig nacheinander einen Prüfungsraum betreten, nur zwei weiblich sind und diese beiden den Raum direkt nacheinander betreten.
c) in einem Klassenzimmer mit 25 Prüflingen mindestens 13 weibliche Prüflinge sind.

Y: Anzahl der männlichen Prüfungsteilnehmer

$p_m := 0.4$

$$P(Y = 5) = \binom{12}{5} \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^7 = 0.227$$

$$\text{combin}(12, 5) \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^7 = 0.227$$

X: Anzahl der weiblichen Prüfungsteilnehmer

$p_w := 0.6$

$$P(A\_) = P(X = 7) = \binom{12}{7} \cdot 0.6^7 \cdot 0.4^5 = 0.227$$

$$\text{combin}(12, 7) \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^7 = 0.227$$

zwei Mädchen hintereinander

(w, w, m, m, m, m, m) (m, w, w, m, m, m, m) (m, m, w, w, m, m, m)

(m, m, m, w, w, m, m) (m, m, m, m, w, w, m) (m, m, m, m, m, w, w)

$$P(X = 2) = 6 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^5 = 0.02212$$

TW

$$P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - F(12) = 1 - 0.15377 = 0.846$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Berechnen Sie, wie viele Prüflinge einen Prüfungsraum mindestens betreten müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einer dieser Prüflinge männlich ist.

Y: Anzahl der männlichen Prüfungsteilnehmer unter n. $p_m := 0.4$

$P(Y \geq 1) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(Y = 0) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(Y = 0) \leq 0.05$

$\binom{n}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^n \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 0.6^n \leq 0.05 \quad n \cdot \ln(0.6) \leq \ln(0.05)$

$n \geq \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.6)}$ Gleitkommazahl, 3 $\rightarrow n \geq 5.86$

Es müssen mindestens 6 Prüfungsteilnehmer sein.

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
In der Woche vor den Abschlussprüfungen haben sich die Prüfungsteilnehmer intensiv auf die Prüfung vorbereitet. Die Zufallsgröße X steht in der folgenden Tabelle für die ganzzahlig gerundete Anzahl der Stunden, die ein Prüfungsteilnehmer durchschnittlich täglich zur Vorbereitung aufgebracht hat.

$$\begin{pmatrix} \text{"Anzahl der Stunden"} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \text{"P(X=x)"} & 2 \cdot b & 0.17 & 0.12 & 2 \cdot a + b & 0.21 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Parameter a und b, wenn der Erwartungswert $E(X) = 5.15$ ist und bestimmen Sie die Standardabweichung σ. [Teilergebnis $a = 0.1$]

(1) $2 \cdot b + 0.17 + 0.12 + (2 \cdot a + b) + 0.21 = 1$

(2) $3 \cdot 2 \cdot b + 4 \cdot 0.17 + 5 \cdot 0.12 + 6 \cdot (2 \cdot a + b) + 7 \cdot 0.21 = 5.15$

(1') $2 \cdot a + 3 \cdot b = 0.5$

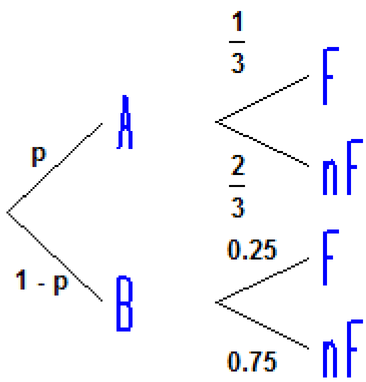
(2') $12 \cdot a + 12 \cdot b = 2.4$

(2') − 6·(1') $-6 \cdot b = -0.6$ $\quad b = 0.1$ in (1') $\quad a = \frac{1}{2} \cdot (0.5 - 3 \cdot 0.1) = 0.1$

$Var\_X := 3^2 \cdot 2 \cdot 0.1 + 4^2 \cdot 0.17 + 5^2 \cdot 0.12 + 6^2 \cdot 0.3 + 7^2 \cdot 0.21 - 5.15^2 \qquad Var\_X = 2.0875$

$\sigma := \sqrt{Var\_X} \qquad \sigma = 1.445$

Teilaufgabe 2 (8 BE)
In einer Jahrgangsstufe sind 51 Schüler und diese werden in den Klassen A und B unterrichtet. Die Schüler der beiden Klassen haben die Möglichkeit, an einem gemeinsamen Fremdsprachenkurs teilzunehmen. $\frac{1}{3}$ der Schüler in Klasse A und $\frac{1}{4}$ der Schüler in Klasse B belegen den Fremdsprachenkurs. 60% der Schüler des Fremdsprachenkurses kommen aus Klasse A.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewählter Schüler in der Klasse B ist und keinen Fremdsprachenunterricht besucht.



$$P_F(A) = 0.60$$

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{p \cdot \frac{1}{3}}{(1-p)\cdot\frac{1}{4} + p\cdot\frac{1}{3}} = 0.60$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\cdot p = 0.60\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot p + \frac{1}{3}\cdot p\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\cdot p = 0.60\cdot\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\cdot p\right)$$

$$\frac{1}{3}\cdot p - \frac{0.60}{12}\cdot p = \frac{0.60}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{17}{60}\cdot p = \frac{3}{20} \quad \Leftrightarrow \quad p := \frac{3}{20}\cdot\frac{60}{17} \qquad p = \frac{9}{17}$$

$$P\left(B \cap \overline{F}\right) = \left(1 - \frac{9}{17}\right)\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{17}$$

oder:

	F	$\overline{F}$	■
A	$\frac{1}{3}\cdot p$	$\frac{2}{3}\cdot p$	p
B	$\frac{1}{4}\cdot(1-p)$	$\frac{3}{4}\cdot(1-p)$	$1-p$
■	$\frac{1}{3}\cdot p + \frac{1}{4}\cdot(1-p)$	$\frac{2}{3}\cdot p + \frac{3}{4}\cdot(1-p)$	1

Rechnung wie oben.

Teilaufgabe 3
Eine Schule benötigt 350 Abschlusszeitungen. Verwenden Sie bei den Rechnungen die Normalverteilung als Näherung.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)
Erfahrungsgemäß kommt es in der Druckerei bei 3% der gedruckten Abschlusszeitungen zu Druckfehlern. Berechnen Sie, wie viele Abschlusszeitungen mindestens gedruckt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens 350 fehlerfreie Exemplare zu erhalten.

X: Anzahl der einwandfreien Abschlusszeitungen unter n gedruckten.

$p := 0.97 \qquad \mu = 0.97 \cdot n \qquad \sigma = \sqrt{0.97 \cdot 0.03 \cdot n} = 0.172 \cdot \sqrt{n}$

$P(X \geq 350) \geq 0.95 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - P(X \leq 349) \geq 0.95 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(X \leq 349) \leq 0.05$

$$\Phi\left(\frac{349 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.05 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{349 - 0.97 \cdot n + 0.5}{0.172 \cdot \sqrt{n}} \leq -1.645$$

$$\Leftrightarrow \qquad 349 - 0.97 \cdot n + 0.5 \leq -1.645 \cdot \left(0.172 \cdot \sqrt{n}\right)$$

Substitution: $\quad z = \sqrt{n}$

$$0.97 \cdot z^2 - 0.283 \cdot z - 349.5 \geq 0 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 5 \end{array} \right. \rightarrow -\infty < z \leq -18.836 \vee 19.128 \leq z < \infty$$

$z \geq 19.128$

Resubstitution: $\quad n := 19.128^2 = 365.88 \qquad$ Aufrunden: $\quad n_{min} := \text{ceil}(n) = 366$

Es müssen mindestens 366 Abschlusszeitungn gedruckt werden.

Teilaufgabe 3.2 (9 BE)
Die Druckerei bietet eine neue Gestaltungsvariante an und vermutet, dass sich 70 Prozent der Kunden für die neue Variante entscheiden (Nullhypothese). Die Behauptung soll durch eine Befragung von 210 Kunden auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn die neue Variante nur bei 60% der Kunden ankommt.

Testgröße X: Anzahl der Kunden unter $n := 210$ $\quad p := 0.7 \quad \mu := n \cdot p = 147$

Nullhypothese H_0: $p = 0.7$ $\quad$ Nullhypothese H_1: $p \neq 0.7$

Testart: Zweiseitiger Signifikanztest

Annahmebereich: $A = \{ k_1 + 1, k_1 + 2, \ldots, k_2 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 0, 1, \ldots, k_1 \} \cup \{ k_2 + 1, k_2 + 2, \ldots, 500 \}$

$P(\overline{A}) \leq 0.05$ $\quad \mu := n \cdot p = 147 \quad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 6.641$ $\quad$ >3, Näherung durch NV möglich

$P(X \leq k_1) \leq 0.025$ $\quad \Phi\left(\dfrac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.025$

TW $\quad \dfrac{k_1 - 147 + 0.5}{6.641} \leq -1.960$ auflösen, $k_1 \rightarrow -\infty < k_1 \leq 133.48364$

$k_1 := 133.48364$

abrunden: $k_{10} := 133$

Berechnung von k_2:

Abweichung vom Erwartungswert: $c := \mu - (k_1 + 1) = 12.516$

Obere Grenze: $k_2 := \mu + c = 159.516$ $\quad$ aufrunden: $k_{20} := 160$

$A = \{ 134, 135, \ldots, 160 \}$ $\quad \overline{A} = \{ 0, 1, \ldots, 133 \} \cup \{ 161, 162, \ldots, 210 \}$

$p_{neu} := 0.6 \quad \mu_{neu} := n \cdot p_{neu} = 126 \quad \sigma_{neu} := \sqrt{n \cdot p_{neu} \cdot (1 - p_{neu})} = 7.099$

$$P(A) = P(134 \leq X \leq 160) = P(X \leq 160) - P(X \leq 133) = \Phi\left(\frac{160 - 126 + 0.5}{7.099}\right) - \Phi\left(\frac{133 - 126 + 0.5}{7.099}\right)$$

$$= \Phi(4.86) - \Phi(1.056) = 1 - 0.85543 = 0.145$$