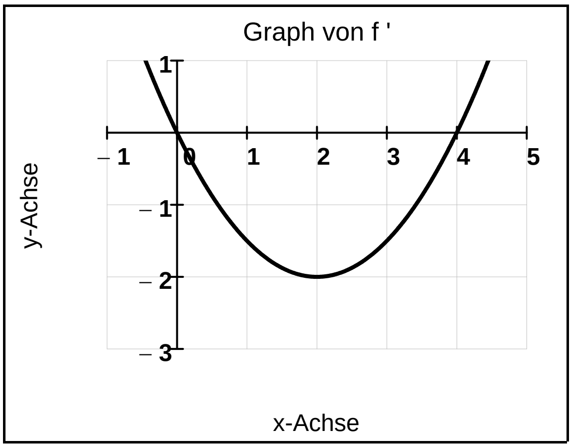
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 12 Nichttechnik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1
Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion einer in ganz IR definierten ganzrationalen Funktion dritten Grades. Alle im Folgenden zu entnehmenden Werte sind ganzzahlig.



Teilaufgabe 1.1 (6 BE)
Geben Sie nur mithilfe des Graphen $G_{f'}$ die maximalen Monotonieintervalle und die Wendestelle des Graphen der Funktion f an. Begründen Sie das Vorliegen der Wendestelle hinreichend.

G_f ist streng monoton steigend in $]-\infty\,;\,0]$, streng monoton fallend in $[0\,;\,4]$ und streng monoton steigend in $[4\,;\,\infty[$.
G_f hat an der Stelle $x = 2$ eine Wendestelle, da $G_{f'}$ dort einen Extrempunkt besitzt.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Bestimmen Sie ausgehend vom Graphen $G_{f'}$ den Funktionsterm $f'(x)$ und dann den Funktionsterm $f(x)$ für den Fall, dass G_f den Ursprung enthält.

[Mögliches Teilergebnis: $f(x) = \frac{1}{6}\cdot\left(x^3 - 6\cdot x^2\right)$]

Scheitelform: $f'(x) = a\cdot(x-2)^2 - 2$

$$f'(0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot a - 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 4\cdot x + 4\right) - 2 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x$$

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x\right) dx = \frac{1}{6}\cdot x^3 - x^2 + c$$

$$f(0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad c = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{6}\cdot x^3 - x^2 \quad\Leftrightarrow\quad f(x) := \frac{1}{6}\cdot\left(x^3 - 6\cdot x^2\right)$$

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit und ermitteln Sie unter Verwendung vorliegender Ergebnisse Art und Koordinaten der Extrempunkte und den Wendepunkt des Graphen G_f.

$f(x) = 0 \qquad x^3 - 6 \cdot x^2 = 0 \qquad x^2 \cdot (x - 6) = 0$

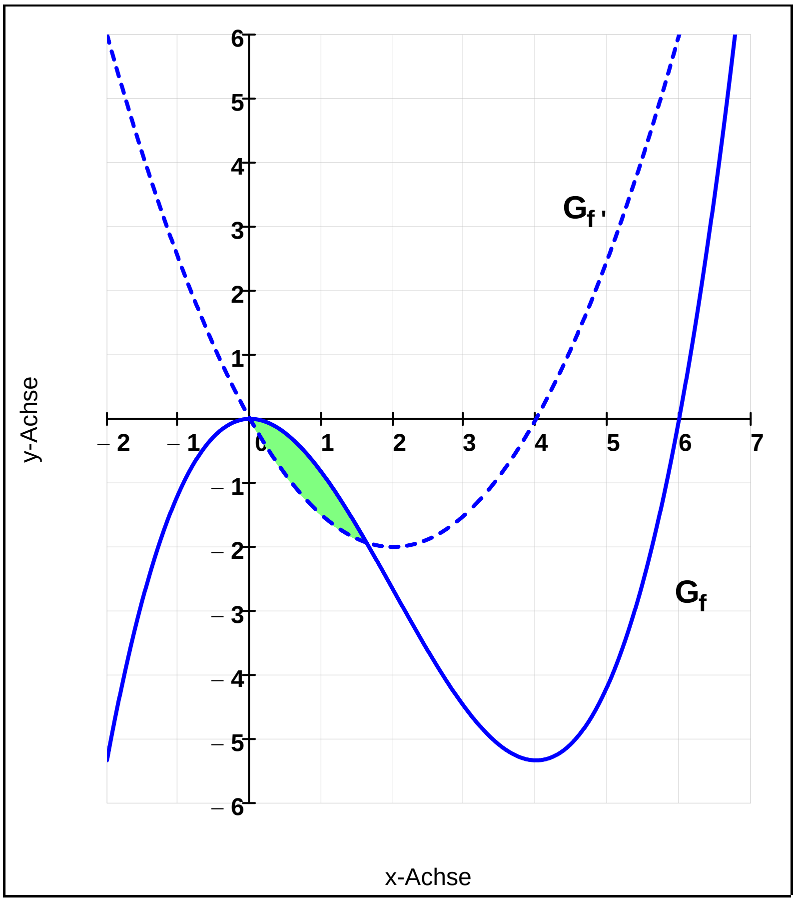
$x_1 = 0$ zweifache Nullstelle $\qquad x_2 = 6$ einfache Nullstelle

Hochpunkt: $x_H := 0 \qquad HP(0, 0)$

Tiefpunkt: $x_T := 4 \qquad TP\left(4, \frac{-16}{3}\right)$

Wendepunkt: $x_W := 2 \qquad WP\left(2, \frac{-8}{3}\right)$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und f ' im Bereich $-2 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.



Teilaufgabe 1.5 (7 BE)
Berechnen Sie die Maßzahl des im 4. Quadranten liegenden endlichen Flächenstücks, das nur von den Graphen G_f und $G_{f'}$ begrenzt wird und runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

$$f(x) = f'(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) - f'(x) = 0$$

$$\frac{x^3}{6} - x^2 - \left(\frac{x^2}{2} - 2\cdot x\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{6}\cdot x\cdot\left(x^2 - 9\cdot x + 12\right) = 0$$

$$x_{S1} := 0 \qquad x^2 - 9\cdot x + 12 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{33}}{2} + \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.372 \\ 1.628 \end{pmatrix}$$

$$x_{S2} := \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} \qquad x_{S3} := \frac{\sqrt{33}}{2} + \frac{9}{2}$$

Flächenmaßzahl: $A = \int_0^{1.628} (f(x) - g(x))\,dx$

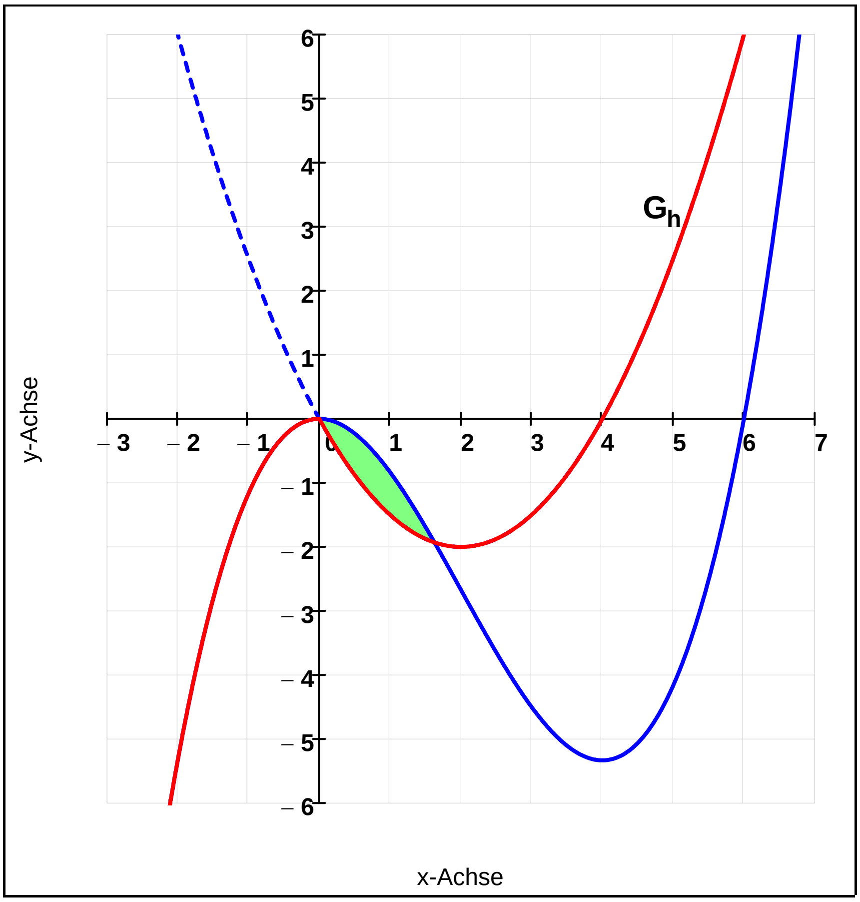
Stammfunktion: $D(x) := \int \left(\frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x\right) dx \rightarrow \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{2} + x^2$

Flächenmaßzahl: $A := D\left(x_{S2}\right) - D\left(x_{S1}\right)$ $\qquad A = 0.79$

Teilaufgabe 2.0
Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}\cdot\left(x^3 - 6\cdot x^2\right) & \text{if } x < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x\right) & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Markieren Sie den Graphen der Funktion h farbig im vorhandenen Koordinatensystem und machen Sie damit Aussagen zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion h an der Stelle $x = 0$ (kurze Begründung erforderlich).



G_h hat an der Stelle $x = 0$ keinen Sprung $\Rightarrow$ h ist bei $x = 0$ stetig

G_h hat an der Stelle $x = 0$ einen Knick $\Rightarrow$ h ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art ud Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen der Funktion h an.

G_h ist streng monoton steigend in $]\,-\infty\,;\,0\,]$, steng monoton fallend in $[\,0\,;\,2\,]$ und streng monoton steigend in $[\,2\,;\,\infty\,[$

Hochpunkt auf der Nahtstelle: $HP(0,0)$

Tiefpunkt: $TP(2,-2)$

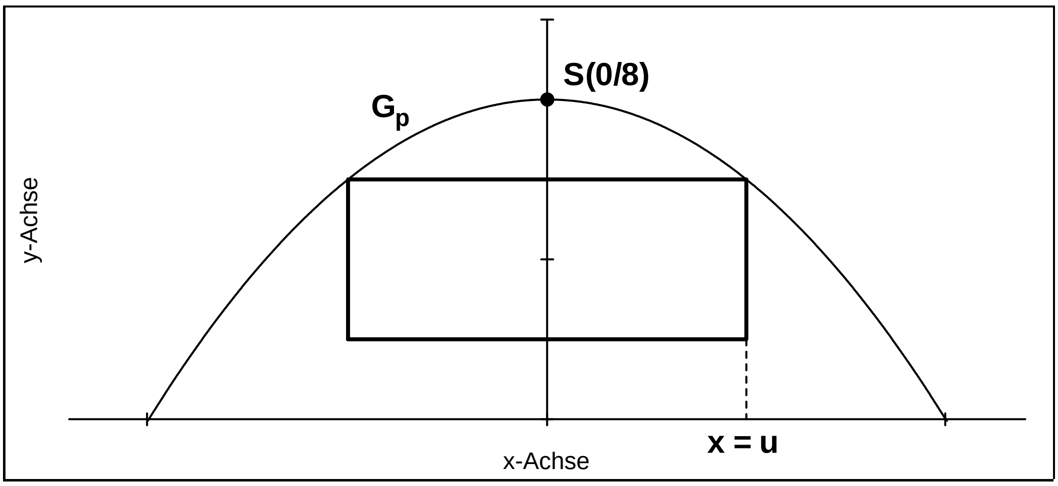
Teilaufgabe 2.3 (3 BE)
Die Funktion $\bar{h}$ entsteht aus h, wenn für $x \geq 0$ der Term $\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x + 1$ verwendet wird.

Erläutern Sie, welche Aussagen man zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $\bar{h}$ an der Stelle $x = 0$ machen kann.

$h2(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x + 1$ $\qquad h2(0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad$ Sprungstelle

$\bar{h}$ ist weder stetig noch differenzierbar.

Teilaufgabe 3.0
Auf einem Campingplatz möchte der Pächter in einem Zelt ein Kino einrichten. Als Projektionsfläche dient eine Seitenwand, welche durch die Parabel G_p und der x-Achse begrenzt wird. Am Boden hat das Zelt eine Spannweite von 20 m. Bei den folgenden Rechnungen wird auf Einheiten verzichtet.



Teilaufgabe 3.1 (3 BE)
Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x) der Parabel G_p.

[Mögliches Ergebnis: $p(x) := -0.08 \cdot x^2 + 8$]

Scheitelform: $p(x) = a \cdot x^2 + 8$

Nullstelle: $p(10) = 0$ $\quad 100 \cdot a + 8 = 0$ $\quad a := \frac{-8}{100} = -0.08$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Es ist beabsichtigt, eine Leinwand von 7m x 4m anzubringen, wobei sich die Unterkante der Leinwand in einer Höhe von 3m befindet. Untersuchen Sie durch Rechnung, ob dies an der Seitenwand möglich ist.

$p(3.5) = 7.02$ $\quad$ Höhe: $7.02 \cdot m - 3 \cdot m = 4.02\, m$

Leinwand in gewünschter Größe ist möglich.

Teilaufgabe 3.3.0
Ein Filmverleih rät dem Pächter zu einer Leinwand bei einer Unterkante in 3m Höhe (siehe Skizze in 3.0).

Teilaufgabe 3.3.1 (7 BE)
Stellen Sie die Maßzahl A(u) des Flächeninhalts der Leinwand auf und bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion $A: u \mapsto A(u)$.

[Mögliches Teilergebnis: $A(u) := \left(-0.16 \cdot u^3 + 10 \cdot u\right)$]

$$A(u) = 2 \cdot u \cdot (p(u) - 3) = 2 \cdot u \cdot \left(-0.08 \cdot u^2 + 8 - 3\right) = -0.16 \cdot u^3 + 10 \cdot u$$

$u > 0$ und $p(u) - 3 > 0 \Leftrightarrow -0.08 \cdot u^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow u^2 < \frac{5}{0.08}$

$$\Leftrightarrow |u| < \sqrt{\frac{5}{0.08}} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{5}{0.08}} < u < \sqrt{\frac{5}{0.08}}$$

Definitionsmenge: $D_u = \left]0 ; \sqrt{\frac{5}{0.08}}\right[$

Teilaufgabe 3.3.2 (7 BE)
Ermitteln Sie u so, dass A(u) den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall Höhe, Breite und Flächeninhalt der Leinwand. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

$$A'(u) := -0.48 \cdot u^2 + 10$$

$$A'(u) = 0 \rightarrow -0.48 \cdot u^2 + 10 = 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, u \\ \text{Gleitkommazahl}, 4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -4.564 \\ 4.564 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{keine Lösung} \\ \text{Lösung} \end{array}$$

$$A(4.56) = 30.429$$

Vergleich mit den Randwerten

$$\lim_{u \to 0^+} \left(-0.16 \cdot u^3 + 10 \cdot u\right) \rightarrow 0$$

$$\lim_{u \to \sqrt{\frac{5}{0.08}}^-} \left(-0.16 \cdot u^3 + 10 \cdot u\right) \rightarrow 1.6155871338926321775\text{e-}27 = 0$$

Abolutes Maximum: ($4.56 / 30.43$)

Beite: $2 \cdot 4.564 \cdot m = 9.13\, m$

Höhe: $(p(4.564) - 3) \cdot m = 3.33\, m$

Fläche: $30.43 \cdot m^2$