Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 12 Nichttechnik - A II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen f_a mit $f_a(x) = a\cdot\left(x^3 + 2\cdot x^2 - 7\cdot x + 4\right)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Zerlegen Sie $f_a(x)$ in Linearfaktoren und gegen Sie die Nullstellen der Funktion f_a mit der jeweiligen Vielfachheit an.

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 2\cdot x^2 - 7\cdot x + 4 = 0$$

Raten: $x_1 = 1$

$$\left(x^3 + 2\cdot x^2 - 7\cdot x + 4\right) \div (x - 1) = x^2 + 3\cdot x - 4$$

$$-\left(x^3 - x^2\right)$$

$$3\cdot x^2 - 7\cdot x$$

$$-\left(3\cdot x^2 - 3\cdot x\right)$$

$$-4\cdot x + 4$$

$$-(-4\cdot x + 4)$$

$$- \quad -$$

$$x^2 + 3\cdot x - 4 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -4$ einfache Nullstelle

$x_2 = 1$ zweifache Nullstelle:

$$f_a(x) = a\cdot(x + 4)\cdot(x - 1)^2$$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Berechnen Sie den Wert von a so, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f_a an der Stelle $x = -3$ die y-Achse bei $y = 5$ schneidet.

$$f'_a(x) = a\cdot\left(3\cdot x^2 + 4\cdot x - 7\right)$$

$$f'_a(-3) = a\cdot 8$$

Tangente in Punkt-Steigungsform: $t_a(x) = f'_a(-3)\cdot(x + 3) + f_a(-3)$

Nebenrechnungen: $3\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-3) - 7 = 8$

$a\cdot\left[(-3)^3 + 2\cdot(-3)^2 - 7\cdot(-3) + 4\right] \rightarrow 16\cdot a$

$t(x, a) := 8\cdot a\cdot(x+3) + 16\cdot a \;=\; 40\cdot a + 8\cdot a\cdot x$

$S_y(0/5)$ einsetzen: $a_0 := t(0, a) = 5 \rightarrow 40\cdot a = 5$ auflösen, $a \;\rightarrow \dfrac{1}{8}$

Konkreter Parameter: $a_0 = \dfrac{1}{8}$

Teilaufgabe 2.0

Nun wird $a = \dfrac{1}{8} = 0.125$ gesetzt. Die Funktion $f_{0.125}$ wird im Folgenden mit f bezeichnet.

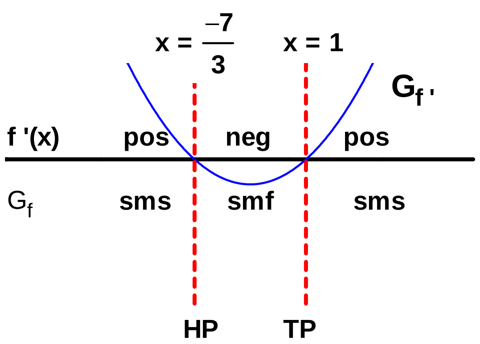
Es gilt: $f(x) = \dfrac{1}{8}\cdot\left(x^3 + 2\cdot x^2 - 7\cdot x + 4\right)$.

Teilaufgabe 2.1 **(7 BE)**

Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.

$f(x) := \dfrac{1}{8}\cdot\left(x^3 + 2\cdot x^2 - 7\cdot x + 4\right)$ $\qquad f'(x) := \dfrac{1}{8}\cdot\left(3\cdot x^2 + 4\cdot x - 7\right)$

$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3\cdot x^2 + 4\cdot x - 7 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{7}{3} \end{pmatrix}$



G_f ist streng monoton fallend in $\left]-\infty\,;\,\dfrac{-7}{3}\right]$,

streng monoton steigend in $\left[\dfrac{-7}{3}\,;\,1\right]$ und

streng monoton fallend in $[\,1\,;\,\infty\,[$.

$f\left(\dfrac{-7}{3}\right) \rightarrow \dfrac{125}{54} = 2.3$

$f(1) = 0$

Hochpunkt: $HP(-2.3, 2.3)$ Tiefpunkt: $TP(1, 0)$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, in dem der Graph der Funktion f am stärksten fällt.

Stärkstes Gefälle von G_f ⇔ absolutes Minimum von f ' ⇔ Wendestelle von f

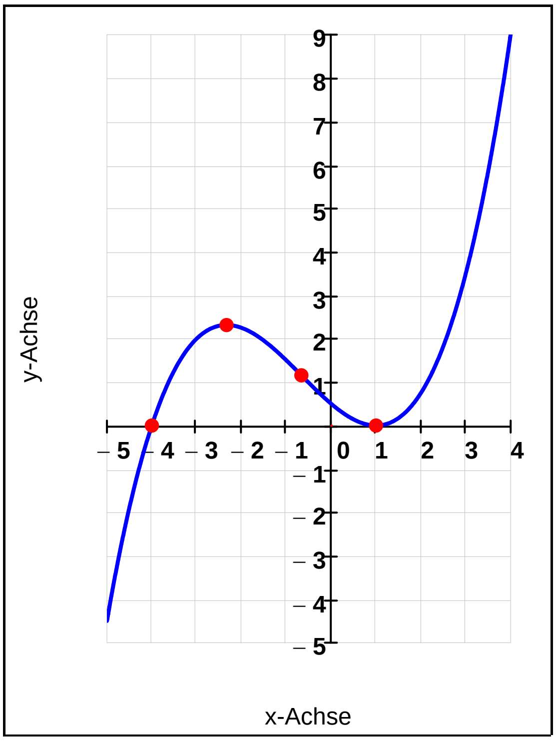
$$f''(x) := \frac{1}{8}\cdot(6\cdot x + 4)$$

$f''(x) = 0$ ⇔ $6\cdot x + 4 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow -\frac{2}{3}$ Nullstelle mit VZW, also Wendestelle

$f'\left(\frac{-2}{3}\right) = -\frac{25}{24}$ < 0, also Gefälle $f\left(\frac{-2}{3}\right) \rightarrow \frac{125}{108} = 1.2$

Gesuchter Punkt: $P(-0.7, 1.2)$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen von f im Bereich $-5 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.



Teilaufgabe 3.0
Gegeben ist ferner die quadratische Funktion p mit $p''(x) = 1$ für alle $x \in IR$.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$, wenn der Punkt A(-4/8) auf der Parabel G_p und ihr Scheitel bei $x_S = \frac{-1}{8}$ liegt.

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4} \cdot x + 1\right)$]

$$p''(x) = 1$$

$$p'(x) = \int 1 \, dx = x + a$$

$$p'\left(\frac{-1}{8}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{8} + a = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \frac{1}{8} \qquad a = \frac{1}{8}$$

$$p(x) = \int \left(x + \frac{1}{8}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{8} \cdot x + b$$

$$p(-4) = 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{8} \cdot (-4) + b = 8 \text{ auflösen}, b \rightarrow \frac{1}{2} \qquad b = \frac{1}{2}$$

$$p(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{8} \cdot x + \frac{1}{2}$$

Teilaufgabe 3.2 (9 BE)
Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen p und f (mit f aus 2.0) und zeichnen Sie die Parabel G_p für $-4 \le x \le 4$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

$$f(x) = p(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - p(x) = 0$$

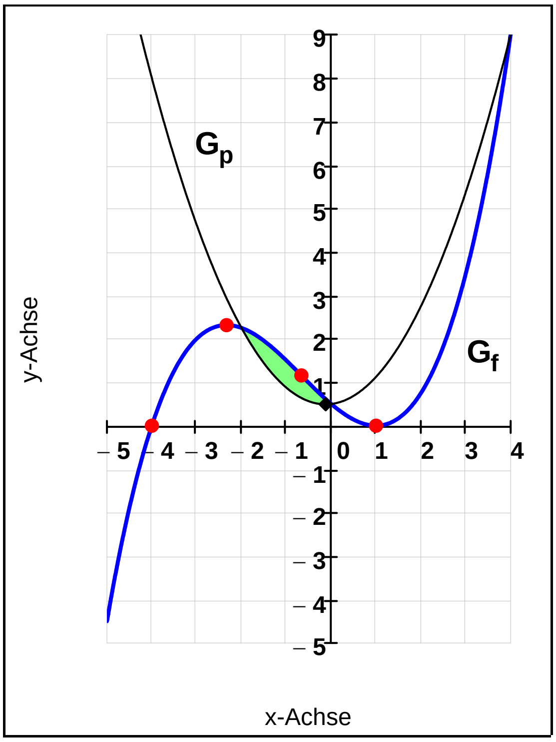
$$\frac{1}{8} \cdot \left(x^3 + 2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 4\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{8} \cdot x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Zusammenfassen: $\frac{x^3}{8} - \frac{x^2}{4} - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{8} \cdot x \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x - 8\right) = 0$

$$x_{S1} := 0 \qquad x^2 - 2 \cdot x - 8 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x_{S2} := -2 \qquad x_{S3} := 4$$

$$p(0) = 0.5 \qquad p(-2) = 2.25 \qquad p(4) = 9$$

Gemeinsame Punkte: $S_1(0, 0.5)$ $\quad S_2(-2, 2.25)$ $\quad S_3(4, 9)$



Teilaufgabe 3.3 (2 BE)
Geben Sie die Lösung der Ungleichung $p(x) - f(x) > 0$ an und erläutern Sie, was das Ergebnis für die Graphen G_f und G_p bedeutet.

$p(x) - f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x) > f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty\,;\,-2[$ oder $x \in \,]\,0\,;\,4\,[$

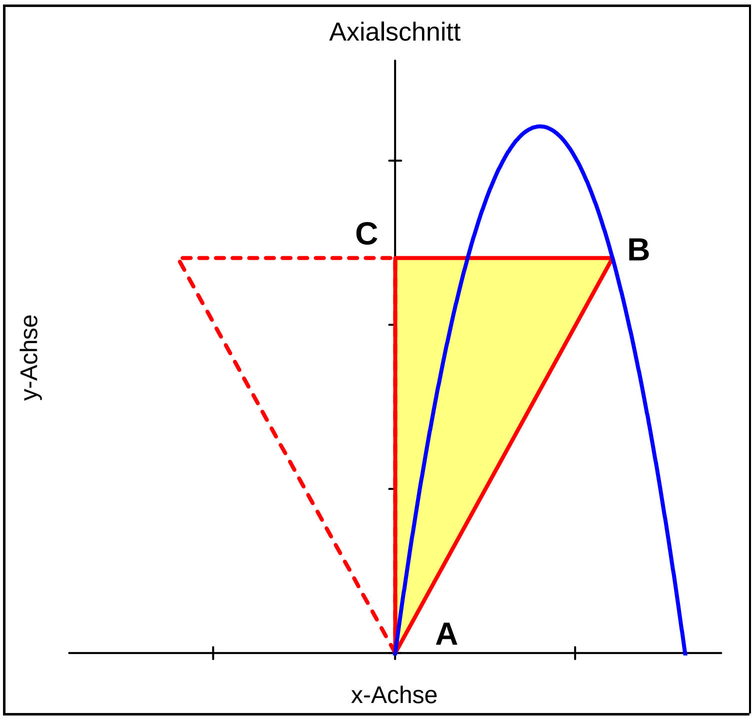
In diesen Intervallen verläuft G_p oberhalb von G_f.

Teilaufgabe 3.4 (5 BE)
Die Graphen G_f und G_p schließen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

$$D(x) = \int (f(x) - p(x))\,dx = \int \left(\frac{x^3}{8} - \frac{x^2}{4} - x\right) dx = \frac{1}{32}\cdot x^4 - \frac{1}{12}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2$$

Flächenmaßzahl: $A := D(0) - D(-2)$ $\quad A = \frac{5}{6} = 0.833$

Teilaufgabe 4.0
Das Dreieck ABC in nebenstehender Abbildung rotiert um die y-Achse, und dabei entsteht ein Kegel. Der Punkt A ist der Ursprung des Koordinatensystems und der Punkt B liegt im I. Quadranten auf der Parabel G_q mit $q(x) = -x^2 + 8 \cdot x$ und $x \in IR$.



Teilaufgabe 4.1 **(3 BE)**
Stellen Sie eine Gleichung $V(r)$ für das Volumen des Kegels auf, wobei $r = \overline{BC}$ der Radius des Kegels ist.

[Mögliches Ergebnis: $V(r) := \frac{-1}{3} \cdot \pi \cdot r^4 + \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot r^3$]

$$V(r) = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot q(r) = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \left(-r^2 + 8 \cdot r\right) = \frac{-1}{3} \cdot \pi \cdot r^4 + \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Teilaufgabe 4.2 **(3 BE)**
Ermitteln Sie die maximale sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V\colon r \mapsto V(r)$.

$$q(r) > 0 \wedge r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -r^2 + 8 \cdot r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot (8 - r) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r > 0 \wedge 8 - r > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r > 0 \wedge r < 8$$

$$\Leftrightarrow \quad D_V =]\,0\,;\,8\,[$$

Teilaufgabe 4.3 (7 BE)
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B so, dass das Kegelvolumen seinen absolut größten Wert annimmt, und berechnen Sie das maximale Kegelvolumen.

$$V'(r) = \frac{-4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 + 8\cdot\pi\cdot r^2$$

$$V'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 + 8\cdot\pi\cdot r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2\cdot\left(\frac{-4}{3}\cdot\pi\cdot r + 8\cdot\pi\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad r_1 = 0$ nicht definiert

$$\frac{-4}{3}\cdot\pi\cdot r + 8\cdot\pi = 0 \text{ auflösen}, r \rightarrow 6 \quad \Leftrightarrow \quad r_2 := 6$$

Funktionswert: $V(6) \rightarrow 144\cdot\pi = 452.4$

Vergleich mit den Randwerten:

$$\lim_{r \to 0^+} \left(\frac{-1}{3}\cdot\pi\cdot r^4 + \frac{8}{3}\cdot\pi\cdot r^3\right) \rightarrow 0$$

$$\lim_{r \to 8^-} \left(\frac{-1}{3}\cdot\pi\cdot r^4 + \frac{8}{3}\cdot\pi\cdot r^3\right) \rightarrow 0$$

absolut maximales Kegelvolumen: $V_{max} := V(6) = 452.4$ $\quad r_{max} := r_2$