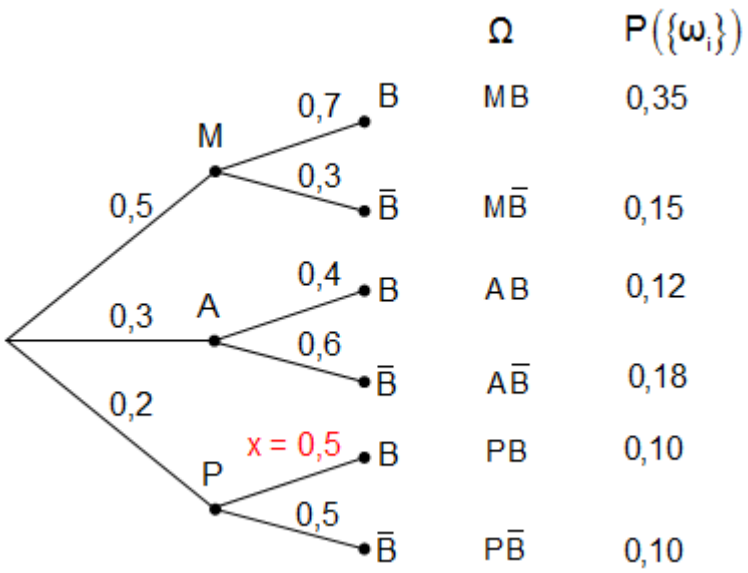
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 12 Nichttechnik - S I - Lösung**

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Teilaufgabe 1.0
Ein neues Medikament wird vor der Markteinführung einem klinischen Test unterzogen. Dabei erhält die Hälfte der am Test teilnehmenden Patienten das neue Medikament (M), 30% aller Patienten bekommen ein entprechendes, schon auf dem Markt vorhandenes Alternativmedikament (A) und der Rest Placebos (P) ohne medizinische Wirkstoffe. Bei 70% der Patienten, die das neue Medikament bekommen haben, stellt sich eine Besserung (B) ein. Bei den Patienten, denen das Alternativmedikament verabreicht wurde, gibt es bei 40% eine Besserung. Insgesamt konnte bei 57% aller getesteten Patienten eine Besserung beobachtet werden.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)
Bestimmen Sie mithilfe eines vollständigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse und beschreiben Sie das Ereignis $\mathbf{E_1 = \{ M\overline{B} ; A\overline{B} \}}$ möglichst einfach mit Worten.
[Teilergebnis: **P({PB}) = 0,1**]



P({ MB ; AB ; PB }) = 0.57

$\mathbf{0.35 + 0.12 + 0.2 \cdot x = 0.57} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 0.5}$

E_1: *Ein verabreichtes Medikament führt zu keiner Besserung.*

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Beim klinischen Test mit insgesamt 400 Teilnehmern sind bei 12% Nebenwirkungen (N) aufgetreten. Die Hälfte aller Teilnehmer hat das neue Medikament M bekommen. 168 Personen haben M erhalten, und es sind keine Nebenwirkungen aufgetreten. Untersuchen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel die Ereignisse M und N auf stochastische Unabhängigkeit.

	N	$\overline{N}$	
M	0.08	0.42	0.5
$\overline{M}$	0.04	0.46	0.5
	0.12	0.88	1

$$P(M \cap \overline{N}) = \frac{168}{400} = 0.42$$

$P(M) = 0.5 \qquad P(N) = 0.12 \qquad P(M) \cdot P(N) = 0.06$

$P(M \cap N) = 0.08$

$\Rightarrow \quad P(M) \cdot P(N) \neq P(M \cap N)$

$\Rightarrow$ M und N sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 2.0 (5 BE)
Ein Medikament wird in zwei Varianten (normal und plus) sowie in drei verschiedenen Packungsgrößen (N1, N2 und N3) angeboten. Der Verkaufspreis in Euro wird als Zufallsgröße X aufgefasst. Dabei ergibt sich mit a, b $\in$ IR folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Art	N1	N1plus	N2	N2plus	N3	N3plus
x	5	7	9	12	22	28
$P(X = x)$	0.1	a	b	$b - 0.05$	$a + 0.15$	$2 \cdot a$

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Bestimmen Sie die Werte von a und b, wenn $E(X) = 18.48$ gilt, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.

(I) $\quad 0.1 + a + b + (b - 0.05) + (a + 0.15) + 2 \cdot a = 1$

(II) $\quad 5 \cdot 0.1 + 7 \cdot a + 9 \cdot b + 12 \cdot (b - 0.05) + 22 \cdot (a + 0.15) + 28 \cdot 2 \cdot a = 18,48$

(I) $\quad 4 \cdot a + 2 \cdot b = 0.8$

(II) $\quad 85 \cdot a + 21 \cdot b = 15.28$

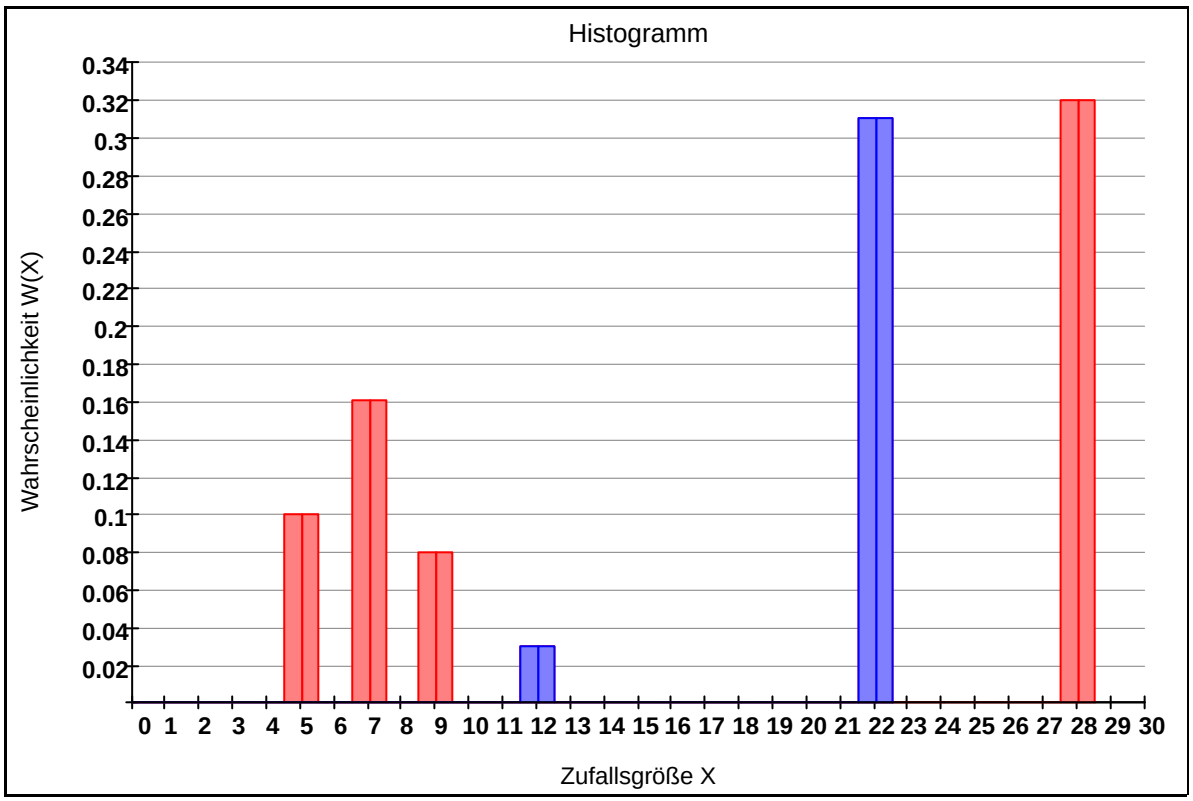
$21(I) - 2 \cdot (II) \qquad -86 \cdot a = -13.76 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0.6$

in (I) $\qquad 4 \cdot 0.16 + 2 \cdot b = 0.8 \qquad \Rightarrow \qquad b = 0.8$

Zufallsgröße: $\quad X := (5 \;\; 7 \;\; 9 \;\; 12 \;\; 22 \;\; 28)^T$

Wahrscheinlichkeit: $\quad W := (0.1 \;\; 0.16 \;\; 0.08 \;\; 0.03 \;\; 0.31 \;\; 0.32)^T$

Programmierung



Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Berechnen Sie mit den Werten für a und b aus Aufgabe 2.1, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die Zufallswerte um mehr als die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert unterscheiden und schrafieren Sie die zugehörige Fläche im Histogramm von 2.1.

$\mu := 18.48$

$\mathbf{Var}(X) := \left(5^2 \cdot 0.1 + 7^2 \cdot 0.16 + 9^2 \cdot 0.08 + 12^2 \cdot 0.03 + 22^2 \cdot 0.31 + 28^2 \cdot 0.32 - \mu^2\right)$

$\mathbf{Var}(X) = 80.55$

$\sigma := \sqrt{\mathbf{Var}(X)} = 8.975$

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(|X - \mu| > \sigma)$

Abweichung um den Erwartungswert: $P(|X - \mu| \leq \sigma)$

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ **Gleitkommazahl**, 3 $\rightarrow P(9.51 \leq X \leq 27.5)$

Runden auf die ganze Zufallsgröße X: $P(12 \leq X \leq 22) = 0.03 + 0.31 = 0.34$

$1 - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 1 - 0.34 = 0.66$

Teilaufgabe 3.0
Bei den Kunden einer bestimmten Apotheke wird eine Umfrage zu ihrem Kaufverhalten durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Kunde ein bestimmtes Medikament kauft, beträgt **p = 0.35**.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)
Es werden 50 Kunden befragt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_2: *Mindestens 13 aber weniger als 21 Kunden kaufen das Medikament.*
E_3: *Weniger als 11 Kunden kaufen das Medikament.*

$p := 0.35 \qquad n := 50$

$$P(E_2) = P(13 \le X < 21) = P(13 \le X \le 20) = P(X \le 20) - P(X \le 12)$$

$$P(E_2) = \sum_{i=0}^{20} B(50, 0.35, i) - \sum_{i=0}^{12} B(50, 0.35, i)$$

$$P(E_2) = 0.81395 - 0.06613 = 0.74782$$

$$P(E_3) = P(X < 11) = P(X \le 10) = \sum_{i=0}^{10} B(50, 0.35, i) = 0.01601$$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_4: *Von 10 Kunden kaufen nur genau der 2., 5. und 9. das Medikament.*
E_5: *Von 10 Kunden kaufen genau drei das Medikament und diese folgen aufeinander.*

$$P(E_4) := 0.35^3 \cdot 0.65^7 = 0.0021$$

$$P(E_5) := 8 \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^7 = 0.0168$$

↑ 8 mögliche Reihenfolgen

KKKxxxxxxx **xKKKxxxxxxx** **xxKKKxxxxx** **xxxKKKxxxx**

xxxxKKKxxx **xxxxxKKKxx** **xxxxxxKKKx** **xxxxxxxKKK**

Teilaufgabe 4 (4 BE)
Für ein weiteres Medikament gilt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer von zwei befragten Kunden dieses Medikament kauft, $\frac{15}{32}$ beträgt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein beliebiger Kunde dieses Medikament kauft (2 Lösungen).

$$B(2, p, 1) = \frac{15}{32} \qquad p := p$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{2}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^1 = \frac{15}{32} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot p \cdot (1-p) = \frac{15}{32} \quad \Leftrightarrow \quad p \cdot (1-p) = \frac{15}{64}$$

$$\Leftrightarrow \quad p - p^2 - \frac{15}{64} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - p + \frac{15}{64} = 0 \text{ auflösen}, p \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 = \frac{3}{8} \qquad p_2 = \frac{5}{8}$$

Teilaufgabe 5 (6 BE)
Der Hersteller gibt an, dass ein bestimmtes Medikament bei 70% der Patienten, denen es verabreicht wird, wirksam ist. In einer Klinik wird vermutet, dass der Anteil der patienten, bei denen das Medikament nicht wirkt, sich erhöht hat (Gegenhypothese) und man führt einen Signifikanztest mit 200 Patienten durch.
Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an.
Berechnen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn das Medikament bei 73 Patienten unwirksam ist?

Testgröße X: Anzahl der Patienten, bei denen das Medikament nicht wirkt.

Stichprobenumfang: $N := 200$

Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese: $p := 0.3$

Nullhypothese H_0: $p_0 \leq p \rightarrow p_0 \leq 0.3$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.3$

Annahmebereich: $A = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{k+1, k+2, \ldots, N\}$

Lösung:

$P(\overline{A}) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P_A \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P_A \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad F(k) \geq 0.95$

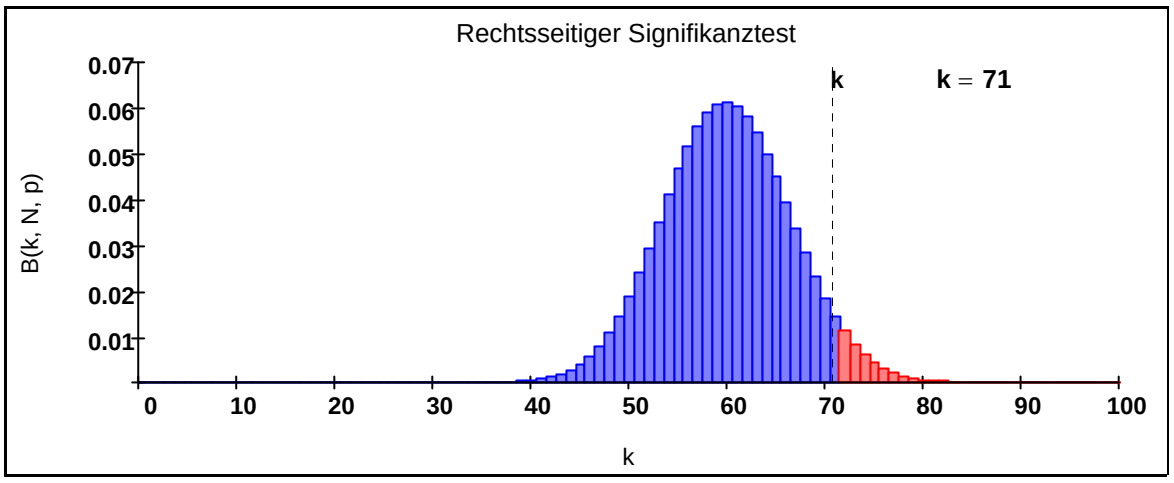
Kumulative Binomialverteilung: $F(k) = \sum_{i=0}^{k} B(100, 0.6, i)$

Tafelwerk Seite 19

$F(k) \geq 0.95 \longrightarrow 0.96037 \quad \Leftrightarrow \quad k := 71$

Annahmebereich: $A = \{0, 1, 2, \ldots, 71\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{72, 72, \ldots, 200\}$

$73 \notin \overline{A} \quad \Rightarrow$ H_0 wird abgelehnt.

Darstellung