Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2015

• Mathematik 13 Nichttechnik - A I - Lösung

Teilaufgabe 1.0
Im Jahr 2012 ist die Gasförderung im Feld *Clipper South* in der südlichen britischen Nordsee angelaufen. Eine Planung für die kommenden Jahre sieht folgende Förderraten $g(t)$ vor.

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ g(t) & 108 & 156 & 220 & 300 & 400 \end{pmatrix}$$

Dabei ist t die Zeit in Jahren seit Förderbeginn und $g(t)$ die Förderrate in Millionen m^3 pro Jahr.
Bis zum vollständigen Abbau des Erdgasfeldes soll sich die Förderrate modellhaft durch die Funktion g mit $g(t) = (a - 2.7 \cdot t) \cdot e^{b \cdot t}$, $a, b \in \mathbb{R}$, beschreiben.
Bei den Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Bestimmen Sie die Parameter a und b mithilfe der Planungsdaten für $t = 0$ und $t = 10$ und interpretieren Sie den Wert von a im Sachzusammenhang .
[Teilergebnis: $a = 108$; $b = 0.1$]

$$g(t, a, b) := \left(a - \frac{27}{10} \cdot t\right) \cdot e^{b \cdot t}$$

Aufstellen des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} g(0, a, b) = 108 \\ g(10, a, b) = 220 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a = 108 \\ e^{10 \cdot b} \cdot (a - 27) = 220 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g(0, a, b) = 108 \\ g(10, a, b) = 220 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, a, b \rightarrow \begin{pmatrix} 108 & \frac{\ln(220)}{10} - \frac{2 \cdot \ln(3)}{5} \end{pmatrix}$$

Auslesen der Lösung:

$a_0 = 108$ $\qquad$ $b_0 = 0.100$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)
Ermitteln Sie das Jahr, in dem die Förderrate nach dem Modell auf den Wert 0 abgesunken und damit das Feld vollständig vollständig abgebaut sein wird.

$$g(t) := \left(108 - \frac{27}{10} \cdot t\right) \cdot e^{0.1 \cdot t}$$

$$g(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 108 - \frac{27}{10} \cdot t = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow 40$$

Im Jahr 2052 wird das Feld vollständig abgebaut sein.

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
Berechnen Sie, in welchem Jahr die Förderrate am größten sein wird, und geben Sie diese an.
[Teilergebnis: $g'(t) = (8.1 - 0.27 \cdot t) \cdot e^{0.1 \cdot t}$]

$$g'(t) = \frac{-27}{10} \cdot e^{0.1 \cdot t} + \left(108 - \frac{27}{10} \cdot t\right) \cdot e^{0.1 \cdot t} \cdot 0.1 = \left(\frac{81}{10} - \frac{27}{100} \cdot t\right) \cdot e^{0.1 \cdot t}$$

$$g'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{81}{10} - \frac{27}{100} \cdot t = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow 30$$

$g(30) = 542.309$

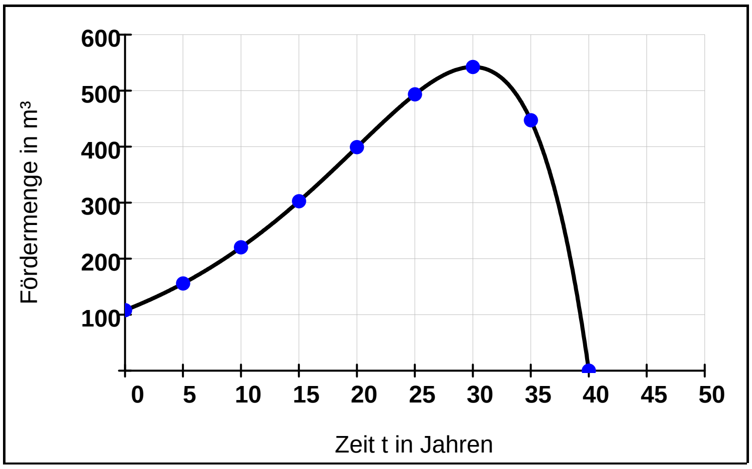
Vergleich mit den Randwerten: $g(0) = 108$ $\qquad$ $g(40) = 0$

absolutes Maximum bei $t_{max} := 30$

Die absolut größte Förderrate ist im Jahr 2042 mit 542 Millionen m^3 pro Jahr.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in ein geeignetes Koordinatensystem.

$t_0 := 0, 5 .. 40$



$t_0 =$	$g(t_0) =$
0	108
5	156
10	220
15	303
20	399
25	493
30	542
35	447
40	0

Teilaufgabe 1.5 (5 BE)
Zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(t) = (1350 - 27 \cdot t) \cdot e^{0.1 \cdot t}$ eine Stammfunktion von g ist und berechnen Sie das Integral $\int_0^{40} g(t)\, dt$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

$$G'(t) = -27 \cdot e^{0.1 \cdot t} + (1350 - 27 \cdot t) \cdot e^{0.1 \cdot t} \cdot 0.1 = (108 - 2.7 \cdot t) \cdot e^{0.1 \cdot t} = g(t)$$

$$\int_0^{40} g(t)\, dt = G(40) - G(0) = (1350 - 27 \cdot 40) \cdot e^{0.1 \cdot 40} - \left[(1350 - 27 \cdot 0) \cdot e^{0.1 \cdot 0}\right]$$

$$= 270 \cdot e^4 - 1350 = 13392$$

Die gesamte Fördermenge beträgt etwa $13392 \cdot 10^6 \cdot m^3 = 13.4 \cdot 10^9 \cdot m^3$, also 13,4 Milliarden m^3.

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion h mit $h(x) = \dfrac{(x-1)\cdot\left(3\cdot x - 0.5\cdot x^2\right)}{x^2-1}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_h \subset IR$.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

Bestimmen Sie D_h sowie die Nullstellen von h und geben Sie die Art der Definitionslücke von h an.

$$x^2 - 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D_h = IR \setminus \{-1;\ 1\}$$

$$h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$$

$x = 1$ stetig behebbare Definitionslücke

$x = -1$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel

Teilaufgabe 2.2.0

Im Folgenden wird die stetige Fortsetzung f mit $f(x) := \dfrac{-0.5\cdot x^2 + 3\cdot x}{x+1}$, $D_f = IR \setminus \{-1\}$ der Funktion h betrachtet (Nachweis nicht erforderlich). Ihr Graph ist G_f.

Teilaufgabe 2.2.1 (4 BE)

Zeigen Sie, dass sich der Funktiomsterm f durch $f(x) = \dfrac{-1}{2}\cdot x + \dfrac{7}{2} - \dfrac{3.5}{x+1}$ darstellen lässt und geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_f an.

$$\left(\frac{-1}{2}\cdot x^2 + 3\cdot x\right) \div (x+1) = \frac{-1}{2}\cdot x + \frac{7}{2} - \frac{\frac{7}{2}}{x+1}$$

$$-\left(\frac{-1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x\right)$$

$$\frac{7}{2}\cdot x$$

$$-\left(\frac{7}{2}\cdot x + \frac{7}{2}\right)$$

$$\frac{-7}{2}$$

schiefe Asymptote: $g(x) := \dfrac{-1}{2}\cdot x + \dfrac{7}{2}$

senkrechte Asymptote: $x = -1$

Teilaufgabe 2.2.2 (8 BE)

Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f.

Runden Sie die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen.

[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{-0.5 \cdot x^2 - x + 3}{(x+1)^2}$]

$$f'(x) = \frac{-1}{2} - \frac{7}{2} \cdot (-1) \cdot (x+1)^{-2} = \frac{-1}{2} + \frac{7}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{-(x+1)^2 + 7}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2 \cdot x - 1 + 7}{2 \cdot (x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2 \cdot x + 6}{2 \cdot (x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - 2 \cdot x + 6 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{7} - 1 \\ -\sqrt{7} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.65 \\ -3.65 \end{pmatrix}$$

		$x = -1 - \sqrt{7}$		$x \neq -1$		$x = -1 + \sqrt{7}$	
Zähler	neg		pos		pos		neg
Nenner	pos		pos		pos		pos
f '(x)	neg		pos		pos		neg
G_f	smf		sms		sms		smf
		TP		Pol		HP	

$f(-3.65) = 6.65$

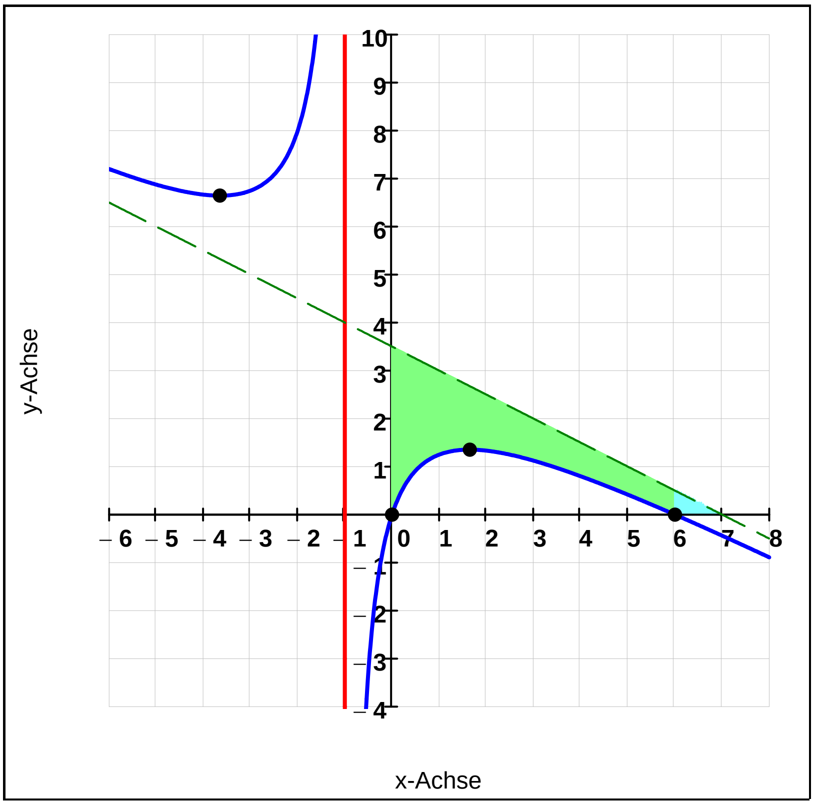
Tiefpunkt: **T (−3.65 / 6.65)**

$f(1.65) = 1.35$

Hochpunkt: **H (1.65 / 1.35)**

Teilaufgabe 2.2.3 **(5 BE)**

Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-6 \le x \le 8$ in ein Koordinatensystem.



Teilaufgabe 2.2.4 **(7 BE)**
G_f, die schiefe Asymptote und die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung von 2.2.3 und ermitteln Sie seine Flächenmaßzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet.

$$\int (g(x) - f(x))\,dx = \int \frac{-1}{2}\cdot x + \frac{7}{2} - \left(\frac{-1}{2}\cdot x + \frac{7}{2} - \frac{\frac{7}{2}}{x+1}\right) dx = \int \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{7}{2}\cdot\ln(|x+1|)$$

Da $x \ge 0$ gilt: $\quad D(x) = \frac{7}{2}\cdot\ln(x+1)$

$$A = A_{\Delta} + \int_0^6 (g(x) - f(x))\,dx$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot g(6) + (D(6) - D(0)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{7}{2}\cdot(\ln(7) - \ln(1)) = \frac{1}{4} + \frac{7}{2}\cdot(\ln(7)) = 7.06$$

Teilaufgabe 3.0

Gegeben ist die Funktion g mit $\mathbf{g(x) = \ln\left(a \cdot x^2 + b \cdot x\right)}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $\mathbf{D_g \subset IR}$.

g besitzt eine Nullstelle $\mathbf{x_N = 2}$ und eine Extremstelle $\mathbf{x_E = 3}$.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Berechnen Sie die Werte a und b.

[Ergebnis: $\mathbf{a = \frac{-1}{8}}$; $\mathbf{b = \frac{3}{4}}$]

$g(2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \qquad (1)$

$$g'(x) = \frac{1}{\left(a \cdot x^2 + b \cdot x\right)} \cdot (2 \cdot a \cdot x + b)$$

$g'(3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot a \cdot 3 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 \cdot a + b = 0 \qquad (2)$

$(1) - 2 \cdot (2) \qquad -8 \cdot a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{-1}{8}$

in (1) $\qquad 4 \cdot \left(\frac{-1}{8}\right) + 2 \cdot b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{3}{4}$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Bestimmen Sie die Art des Extrempunktes des Graphen von g.

$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{4} \cdot x + \frac{3}{4} = 0$ **auflösen**, $x \;\rightarrow 3$

Es gilt für das Argument von ln: $a \cdot x^2 + b \cdot x > 0$ Vorzeichen entscheidet also der Term $\frac{-1}{4} \cdot x + \frac{3}{4}$

Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus: rel. Hochpunkt an der Stelle x = 3.

Funktionsterm: $\quad g(x) := \ln\left(\frac{-1}{8} \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot x\right)$

Definitionsmenge: $\quad \frac{-1}{8} \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot x > 0$ **auflösen**, $x \;\rightarrow 0 < x < 6$

$g(3) = 0.118$

Vergleich mit den Randwerten:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{-1}{8} \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot x\right) \rightarrow -\infty \qquad \lim_{x \to 6^-} \ln\left(\frac{-1}{8} \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot x\right) \rightarrow -\infty$$

absoluter Hochpunkt an der Stelle x = 3.

Graphische Darstellung in der Prüfung nicht velangt.

Nullstellen: $\frac{-1}{8} \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot x = 1$ **auflösen** $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$