Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 13 Nichttechnik - A II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion h mit $h(x) = \dfrac{(x^2+1)\cdot(1-x)}{x^2-3\cdot x+2}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)
Bestimmen Sie D_h und geben Sie die Lage und die Art der Definitionslücken von h an. Untersuchen Sie h auf Nullstellen. Geben Sie die Funktionsgleichung der stetigen Fortsetzung von h an.

$x^2 - 3\cdot x + 2 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Definitionsmenge: $D_h = \mathbb{R} \setminus \{ 1 ; 2 \}$

$x_1 = 1$ stetig behebbare Definitionslücke

$x_2 = 2$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel

es gibt keine Nullstellen.

Stetige Fortsetzung: $h\_(x) = \dfrac{(x^2+1)\cdot(1-x)}{(x-1)\cdot(x-2)} = \dfrac{-(x^2+1)}{x-2}$

Teilaufgabe 1.2.0

Betrachtet wird nun die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2-x}$ in ihrer Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$.

Ihr Graph ist G_f.

Teilaufgabe 1.2.1 (6 BE)

Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm von f in der Form $f(x) := -x - 2 + \frac{5}{2 - x}$ darstellen lässt.

Geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_f an und untersuchen Sie das Verhalten von f bei Annäherung an die Definitionslücke.

$$\left(x^2 + 1\right) \div (-x + 2) = -x - 2 + \frac{5}{-x + 2}$$

$$-\left(x^2 - 2 \cdot x\right)$$

$$2 \cdot x + 1$$

$$-(2 \cdot x - 4)$$

$$5$$

schiefe Asymptote: $g(x) := -x - 2$

senkrechte Asymptote: $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\overbrace{x^2 + 1}^{\to 5}}{\underbrace{2 - x}_{\to 0^-}} \to -\infty \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{\overbrace{x^2 + 1}^{\to 5}}{\underbrace{2 - x}_{\to 0^+}} \to \infty$$

Teilaufgabe 1.2.2 (8 BE)

Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f.

Runden Sie diese auf zwei Nachkommastellen.

[Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-x^2 + 4 \cdot x + 1}{(2 - x)^2}$]

$$f'(x) = -1 - \frac{5 \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{-\left(4 - 4 \cdot x + x^2\right) + 5}{(2 - x)^2} = \frac{-x^2 + 4 \cdot x + 1}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 4 \cdot x + 1 = 0 \text{ auflösen}, x \to \begin{pmatrix} \sqrt{5} + 2 \\ 2 - \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.24 \\ -0.24 \end{pmatrix}$$

	$x = 2-\sqrt{5}$		$x = 2$		$x = 2+\sqrt{5}$	
Zähler	neg		pos	pos		neg
Nenner	pos		pos	pos		pos
f '(x)	neg		pos	pos		neg
G_f	smf		sms	sms		smf
		TP		Pol	HP	

Tiefpunkt:

$f(2-\sqrt{5}) = 0.47$

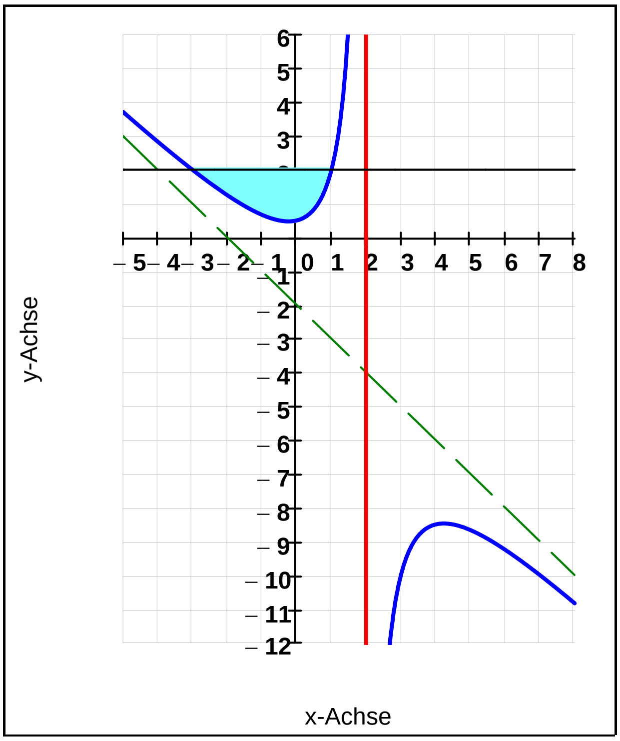
T (−0.24 / 0.47)

Hochpunkt:

$f(2+\sqrt{5}) = -8.47$

H (4.24 / −8.47)

Teilaufgabe 1.2.3 **(5 BE)**
Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-5 \le x \le 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie für die Zeichnung eine ganze Seite.



Teilaufgabe 1.2.4 **(7 BE)**
Der Graph der Funktion f und eine Parallele zur x-Achse im Abstand 2 LE schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung (Aufgabe 1.2.3) und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen gerundet.

$$f(x) = 2 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$D(x) = \int (2 - f(x))\,dx = \int \left[2 - \left(-x - 2 + \frac{5}{2-x}\right)\right] dx = \int \left(x + 4 + \frac{5}{2-x}\right) dx$$

$$D(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 + 4\cdot x + 5\cdot \ln(|2 - x|)$$

$$A = D(1) - D(-3) = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 5\cdot \ln(|2-1|) - \left[\frac{1}{2}\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-3) + 5\cdot\ln[|2-(-3)|]\right]$$

$$A = 3.95$$

Teilaufgabe 1.3.0

Nun wird die Funktion g mit $g(x) = \ln(f(x)) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2-x}\right)$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset$ IR betrachtet. Verwenden Sie im Folgenden gegebenenfalls die Ergebnisse von Teilaufgabe 1.2.

Teilaufgabe 1.3.1 (3 BE)
Bestimmen Sie D_g und untersuchen Sie das Verhalten von g an den Grenzen der Definitionsmenge.

$D_g =]\,-\infty\,;\,2\,[$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\underbrace{\frac{x^2+1}{2-x}}_{\infty}\right) \to \infty \qquad \lim_{x \to 2^-} \ln\left(\underbrace{\frac{x^2+1}{2-x}}_{\infty}\right) \to \infty$$

Teilaufgabe 1.3.2 (3 BE)
Berechnen Sie die Nullstellen von g.

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+1}{2-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \text{ auflösen}, x \to \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.62 \\ -1.62 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -1.62$

$x_2 = 0.62$

Teilaufgabe 1.3.3 (3 BE)
Weisen Sie nach, dass der Graph von g einen Extrempunkt besitzt, und geben Sie dessen Art und Koordinaten an.

$$g(x) := \ln\left(\frac{x^2+1}{2-x}\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$ die Extremstellen von g und von f stimmen überein.

$$x_E := -0.24$$

$$g(x_E) = -0.75$$ Tiefpunkt: **T (−0.24 / −0.75)**

Teilaufgabe 2.0
Bei einer Infusion wird einem Patienten pro Minute eine konstante Menge eines Medikaments zugeführt. Das im Blut angereicherte Medikament wird über die Nieren wieder ausgeschieden. Der Anteil der im Blut vorhandenen Medikamentenmenge, der pro Minute abgebaut wird, wird als Ausscheidungsrate a bezeichnet.
Für die im Blut des Patienten befindliche Menge m des Medikaments in mg (Milligramm) zum Zeitpunkt t (in Minuten) nach Beginn der Infusion egibt sich eine Funktion der Form:
$m(t) = 100 \cdot \left(1 - e^{-a \cdot t}\right)$, $t \geq 0$ und $a > 0$.
Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.
Runden Sie bei der Zeit immer auf Minutn, bei der Menge auf zwei Nachkommastellen.

Teilaufgabe 2.1 (2 BE)
Eine Minute nach Beginn der Infusion befinden sich bereits 4,88 mg des Medikaments im Blut des Patienten. Weisen Sie nach, dass für die Ausscheidungsrate $a = 0.05 \cdot \frac{1}{min}$ gilt.

$$m(1) = 4.88 \quad \Leftrightarrow \quad 100 \cdot \left(1 - e^{-a}\right) = 4.88$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - e^{-a} = \frac{4.88}{100} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{4.88}{100} = e^{-a} \quad \Leftrightarrow \quad a := -\ln\left(1 - \frac{4.88}{100}\right) \qquad a = 0.05$$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Berechnen Sie, welche Menge des Medikaments sich 10 Minuten nach Anlegen der Infusion im Blut befindet und wann die therapeutische Minimalmenge von 70 mg errreicht wird.
Bestimmen Sie die Menge, die bei dauerhafter Infusionstherapie langfristig im Körper des Patienten vorhanden ist.

$$m(t) := 100 \cdot \left(1 - e^{-0.05 \cdot t}\right)$$ nach 10 Minuten: $$m(10) = 39.347$$

$$m(t_0) = 70 \qquad 100 \cdot \left(1 - e^{-0.05 \cdot t_0}\right) = 70 \qquad t_0 := \frac{\ln\left(1 - \frac{70}{100}\right)}{-0.05} = 24.079 \qquad t_0 = 24.079$$

$$\lim_{t \to \infty} m(t) \to 100.0$$

Teilaufgabe 2.3 **(4 BE)**
Weisen Sie nach, dass für die erste Ableitung von m gilt:
$m'(t) := 5 \cdot e^{-0.05 \cdot t}$. Berechnen Sie die Werte $m'(10)$ und $m'(30)$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

$$m'(t) = 100 \cdot \left(-e^{-0.05 \cdot t}\right) \cdot (-0.05) = 5 \cdot e^{-0.05 \cdot t}$$

$m'(10) = 3.03$ $\qquad$ $m'(30) = 1.12$

Nach 10 Min. nimmt der Gehalt des Medikaments im Körper des Patienten um ca 3 mg/min zu,
nach 30 Min. um ca 1,1 mg/min.
Die Zuwachsrate sinkt mit der Dauer der Infusion.

Teilaufgabe 2.4.0
Die dem Patienten während der gesamten Infusion zugeführte Medikamentenmenge pro Minute ist von Anfang an konstant.

Teilaufgabe 2.4.1 **(2 BE)**
Ermitteln Sie die pro Minute zugeführte Medikamentenmenge.

$m'(0) = 5$

Dem Patienten werden pro Minute 5 mg des Medikaments zugeführt.

Teilaufgabe 2.4.2 **(6 BE)**
In einer Infusionsflasche befinden sich 1000 mg. Die Infusion wird um 8.00 Uhr erstmals beim Patienten angelegt. Damit werden dem Patienten ab diesem Zeitpunkt konstant 5 mg des Medikaments pro Minute zugeführt. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Flasche leer ist.
Ab diesem Zeitpunkt wird das Medikament gemäß der Funktion $r(t) := 100 \cdot e^{-0.05 \cdot t}$ mit $t \geq 0$ abgebaut, wobei r(t) die die zur Zeit t vorhandene Restmenge angibt. Begründen Sie, warum diese Funktion den Sachverhalt sinnvoll wiedergibt, und bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Pflegekraft die Infusionsflasche ersetzen muss, bevor die therapeutische Minimalmenge von 70 mg im Blut des Patienten unterschritten wird.

$\frac{1000}{5} = 200$ $\qquad$ die Flasche ist nach 200 Minuten leer, also um 11.20 Uhr.

Zu diesem Zeitpunkt befinden sich $m(200) = 100$ mg des Medikaments im Blut des Patienten.
Die Ausscheidungsrate beträgt $a = -0.05$.
Der Abbau des Medikaments erfolgt ab diesem Zeitpunkt nach der Funktion
$r(t) = m(200) \cdot e^{-0.05 \cdot t} = 100 \cdot e^{-0.05 \cdot t}$

$$r(t_{min}) = 70 \Leftrightarrow \quad 100 \cdot e^{-0.05 \cdot t_{min}} = 70 \quad \Leftrightarrow \quad t_{min} := \frac{\ln\left(\frac{70}{100}\right)}{-0.05} \qquad t_{min} = 7.13$$

die Pflegekraft muss die Flasche spätestens um 11.27 Uhr wechseln.

Graphische Veranschaulichung in der Prüfung nicht verlangt.