Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 13 Nichttechnik - B I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Gerade **g:** $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie die Ebenen **E:** $\vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

und F: $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 - 2 = 0$ mit k, m, r $\in$ IR gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Berechnen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

[Mögliches Teilergebnis: **E:** $3 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 = 0$]

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 & x_1 \\ -1 & 0 & x_2 \\ -3 & 3 & x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[5\cdot(\mathrm{III}) + 3\cdot(\mathrm{I})]{5\cdot(\mathrm{II}) + (\mathrm{I})} \begin{pmatrix} 5 & -7 & x_1 \\ 0 & -7 & 5 \cdot x_2 + x_1 \\ 0 & -6 & 5 \cdot x_3 + 3 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[7\cdot(\mathrm{III}) - 6\cdot(\mathrm{II})]{} \begin{pmatrix} 5 & -7 & x_1 \\ 0 & -7 & 5 \cdot x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 15 \cdot x_1 - 30 \cdot x_2 + 35 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Ebene E: $\quad 15 \cdot x_1 - 30 \cdot x_2 + 35 \cdot x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 = 0$

Die Ebene E verläuft durch den Koordinatenursprung.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F.

[Mögliches Ergebnis: s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; t $\in$ IR.]

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[{[(\mathrm{II}) - (\mathrm{I})] \cdot \frac{1}{2}}]{} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wähle: $\quad x_3 = \tau$

2. Zeile: $\quad x_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \tau) \qquad$ 3. Zeile: $\quad x_1 = \frac{1}{3} \cdot \left[-7 \cdot \tau + \frac{6}{2} \cdot (1 + \tau) \right] = 1 - \frac{4 \cdot \tau}{3}$

Schnittgerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4 \cdot \tau}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \tau \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, den E, F und g gemeinsam haben.

g $\cap$ s:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & t & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & 8 & 2 \\ 2 & -3 & -0.5 \\ 4 & -6 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[5 \cdot (III) + 4 \cdot (I)]{5 \cdot (II) + 2 \cdot (I)} \begin{pmatrix} -5 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(III) - 2 \cdot (II)]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & t & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad t = 1.5$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.5 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

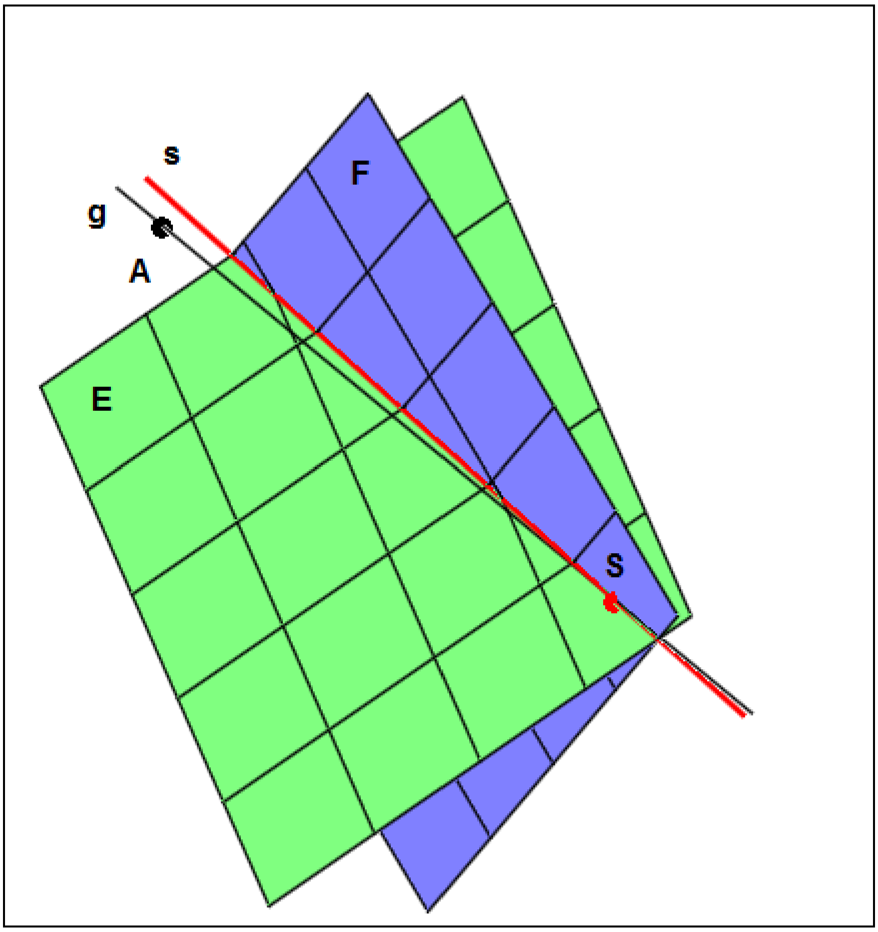
Schnittpunkt: **S(−11 | 5 | 9)**

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)
Überprüfen Sie, ob der Aufpunkt von g auf einer der beiden Ebenen E oder F liegt, und fertigen Sie eine Skizze an, aus der man die gegenseitige Lage von E, F, s, g und S ersehen kann.

Ortsvektor von A: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einsetzen in E: $3 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = -2$ ungleich Null $\Rightarrow$ A $\notin$ E

Einsetzen in F: $3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 2 = -2$ ungleich Null $\Rightarrow$ A $\notin$ F



Teilaufgabe 2.0
Die drei Fertigungsbereiche K, L und M eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Die Gesamtproduktion beträgt im Bereich K 200 ME (Mengeneinheiten), im bereich L 150 ME und im Bereich M 140 ME. Die Inputmatrix der Verflechtung ist gegeben durch: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.1 & 0.05 \\ 0.15 & 0.2 & 0 \\ 0.55 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Erläutern Sie die Bedeutung der Wert 0 in der Inputmatrix, berechnen Sie die Marktabgaben der Bereiche K, L und M und zeichnen Sie das zugehörige Verflechtungsdiagramm (Gozintograph).

$a_{23} = 0$ von L wird nichts an M geliefert

$a_{32} = 0$ von M wird nichts an L geliefert

Produktionsvektor: Einheitsmatrix: Inputmatrix:

$$x := \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 140 \end{pmatrix} \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0.05 & 0.1 & 0.05 \\ 0.15 & 0.2 & 0 \\ 0.55 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad E - A = \begin{pmatrix} 0.95 & -0.1 & -0.05 \\ -0.15 & 0.8 & 0 \\ -0.55 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

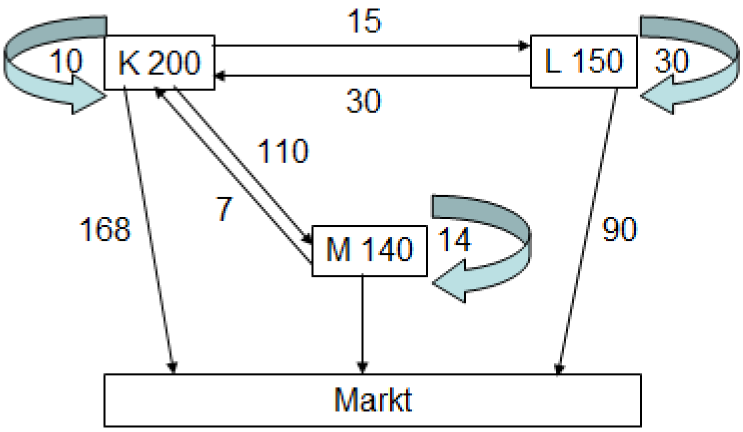
Marktvektor:

$\mathbf{y} := (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 168 \\ 90 \\ 16 \end{pmatrix}$

Berechnungen

$$\textbf{Warenflussmatrix} = \begin{pmatrix} \text{"Verflechtung"} & \text{"K"} & \text{"L"} & \text{"M"} & \text{"y"} & \text{"x"} \\ \text{"K"} & 10 & 15 & 7 & 168 & 200 \\ \text{"L"} & 30 & 30 & 0 & 90 & 150 \\ \text{"M"} & 110 & 0 & 14 & 16 & 140 \end{pmatrix}$$

Gozintograph:



Teilaufgabe 2.2.0
In der nächsten Produktionsperiode führt eine Änderung im Fertigungsprogrsmm zur neuen Input-

Matrix $\mathbf{A_{neu}} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.1 & 0.05 \\ 0.15 & 0.2 & 0 \\ a & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Teilaufgabe 2.2.1 (2 BE)
Interpretieren Sie die Veränderungen der Input-Matrix.

Bereich M benötigt nur noch die Hälfte für den Eigenbedarf.

Die Lieferung von M an K ist variabel.

Teilaufgabe 2.2.2 (6 BE)
In dieser Periode sollen folgende Rahmenbedingungen gelten:

- Es wird erwartet, dass die Marktnachfrage nach den Produkten des Bereiches L auf 114 ME, die nach den Produkten des Bereiches M auf 33 ME steigt.
- Die Produktionsmenge im Bereich L soll gesteigert werden, während die Produktionsmengen der Bereiche K und M unverändert bleiben.

Bestimmen Sie die Produktionsmenge von Bereich L und die Nachfrage an Produkten aus dem Bereich K. Berechnen Sie außerdem den Wert a der neuen Input-Matrix A_{neu}.

$$\overrightarrow{y_{neu}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 114 \\ 33 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{x_{neu}} = \begin{pmatrix} 200 \\ x_2 \\ 140 \end{pmatrix} \qquad A_{neu}(a) := \begin{pmatrix} 0.05 & 0.1 & 0.05 \\ 0.15 & 0.2 & 0 \\ a & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$E - A_{neu}(a) = \begin{pmatrix} 0.95 & -0.1 & -0.05 \\ -0.15 & 0.8 & 0 \\ -a & 0 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Bedingung: $\overrightarrow{y_{neu}} = \left(E - A_{neu}\right)\cdot\overrightarrow{x_{neu}}$

$$\begin{pmatrix} 0.95 & -0.1 & -0.05 \\ -0.15 & 0.8 & 0 \\ -a & 0 & 0.95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ x_2 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 114 \\ 33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.1\cdot x_2 + 183.0 \\ 0.8\cdot x_2 - 30.0 \\ 133.0 - 200\cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 114 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} y_1 & x_2 & a \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.95 & -0.1 & -0.05 \\ -0.15 & 0.8 & 0 \\ -a & 0 & 0.95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ x_2 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 114 \\ 33 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, y_1, x_2, a \rightarrow \begin{pmatrix} 165.0 & 180.0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Auslesen der Werte:

Marktnachfrage an K:

$y_1 = 165$

Produktion Bereich L:

$x_2 = 180$

Inputmatrix:

$a = 0.5$

Teilaufgabe 2.2.3 **(6 BE)**
Sei nun $\mathbf{a = 0.5}$. In einem zukünftigen Produktionszeitraum soll die Produktuion im Bereich K verringert und im Bereich M im gleichen Maße gesteigert werden. Der neue Produktionsvektor lässt sich in Abhängigkeit des Parameters $u \in \mathbb{R}^+$ darstellen durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 - u \\ 180 \\ 140 + u \end{pmatrix}$.
Die Marktabgabe von Bereich L soll auf mindestens 129 Mengeneinheiten erhöht werden.
Bestimmen Sie das größtmögliche Intervall der Werte, die u annehmen kann.

$$A_{neu} := \begin{pmatrix} 0.05 & 0.1 & 0.05 \\ 0.15 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.05 \end{pmatrix} \qquad E - A_{neu} = \begin{pmatrix} 0.95 & -0.1 & -0.05 \\ -0.15 & 0.8 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.95 \end{pmatrix} \qquad y_{neu} := \begin{pmatrix} 165 \\ 114 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.95 & -0.1 & -0.05 \\ -0.15 & 0.8 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 - u \\ 180 \\ 140 + u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.0 \cdot u + 165.0 \\ 0.15 \cdot u + 114.0 \\ 1.45 \cdot u + 33.0 \end{pmatrix}$$

Bedingungen:

$$\begin{pmatrix} -1.0 \cdot u + 165.0 \geq 0 \\ 0.15 \cdot u + 114.0 \geq 129 \\ 1.45 \cdot u + 33.0 \geq 0 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, u \; \rightarrow 100.0 \leq u \leq 165.0$$