Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Mathematik 13 Nichttechnik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c_k} = \begin{pmatrix} k+1 \\ -6\cdot k - 7 \\ 5\cdot k \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c_k}$ unabhängig von k eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

$$\lambda_1\cdot\vec{a} + \lambda_2\cdot\vec{b} + \lambda_3\cdot\vec{c_k} = \vec{0}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & k+1 & 0 \\ 3 & 2 & -6\cdot k - 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5\cdot k & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(III) - 2\cdot(I)]{(II) + 3\cdot(I)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & k+1 & 0 \\ 0 & -4 & -3\cdot k - 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3\cdot k - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(III) + (II)]{} \begin{pmatrix} -1 & -2 & k+1 & 0 \\ 0 & -4 & -3\cdot k - 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Zeile: $-6\cdot\lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 0$

2. Zeile: $-4\cdot\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0$

1. Zeile: $-\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$

Es gibt nur die triviale Lösung, die Vektoren bilden eine Basis

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Stellen Sie für $k = -1$ den Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c_{-1}}$ dar.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -5 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[(III) - 2\cdot(I)]{(II) + 3\cdot(I)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[(III) + (II)]{} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Zeile: $-6\cdot\lambda_3 = 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = -1$

2. Zeile: $-4\cdot\lambda_2 = -3 - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 1$

$$\vec{d} = -2\cdot\vec{a} + \vec{b} - \vec{c_{-1}}$$

1. Zeile: $-\lambda_1 = 2\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Der Punkt **D(0 | –3 | 9)** und die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen die Ebene E auf.

Geben Sie eine Gleichung von E in Parameterform an und bestimmen Sie die zugehörige Koordinatenform.
[Mögliches Teilergebnis: E: $x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$]

Parameterform E: $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & x_1 \\ 3 & 2 & x_2 + 3 \\ -2 & 0 & x_3 - 9 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow[\text{(III)} - 2\cdot\text{(I)}]{\text{(II)} + 3\cdot\text{(I)}} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & x_1 \\ 0 & -4 & x_2 + 3 + 3\cdot x_1 \\ 0 & 4 & x_3 - 9 - 2\cdot x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{(III)} + \text{(II)}]{} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & x_1 \\ 0 & -4 & x_2 + 3 + 3\cdot x_1 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 - 6 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform E: $x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen und zeichnen Sie E in ein Koordinatensystem.

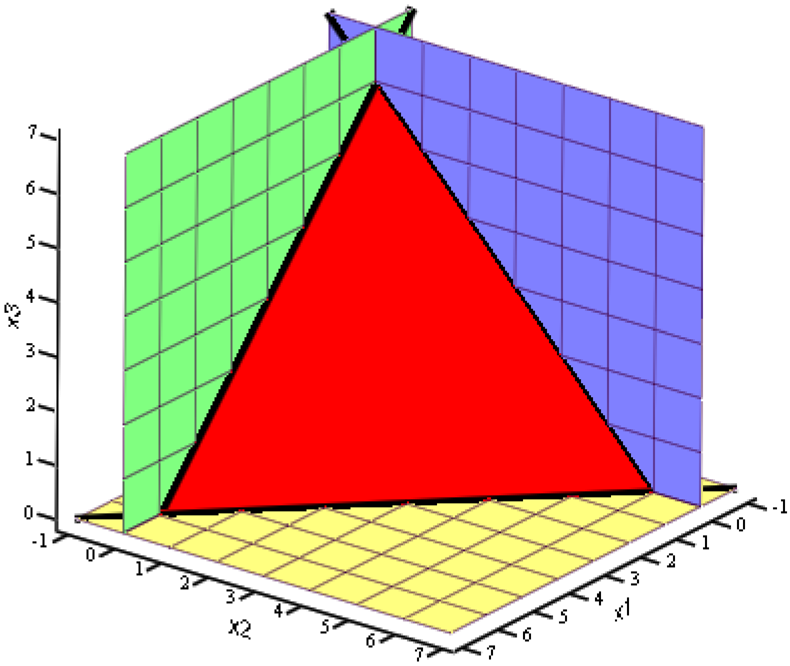
Achsenabschnittsform von E:

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{6} = 1$$

$S_1\,(6 \,|\, 0 \,|\, 0)$

$S_2\,(0 \,|\, 6 \,|\, 0)$

$S_3\,(0 \,|\, 0 \,|\, 6)$



Teilaufgabe 1.5 (3 BE)
Die Ortsvektoren $\vec{c_k} = \overrightarrow{OC_k}$ legen die Punkte C_k einer Geraden g fest. Geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an und untersuchen Sie die gegenseitige Lage von E und g.

$$\overrightarrow{OC_k} = \begin{pmatrix} k+1 \\ -6\cdot k - 7 \\ 5\cdot k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

in E einsetzen: $(k+1) + (-6\cdot k - 7) + (5\cdot k) - 6 = 0$

$-12 = 0$ Widerspuch

Gerade g und Ebene E sind echt parallel.

Teilaufgabe 2.0
Die Unternehmen K, L und M sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten.

Die Inputmatrix der Verflechtung ist $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$.

Der Eigenverbrauch von K beträgt 8 ME, K beliefert L mit 2 ME und M mit 9 ME.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
Erläutern Sie, welche Gemeinsamkeit für den jeweiligen Eigenverbrauch der drei Unternehmen festgestellt werden kann, und erstellen Sie eine vollständige Input-Output-Tabelle der Verflechtung.

Die Unternehmen benötigen jeweils 20% ihrer eigenen Produktion.

$\frac{8}{x_1} = 0.2$ auflösen, $x_1 \rightarrow 40.0$ $\qquad$ $\frac{2}{x_2} = 0.1$ auflösen, $x_2 \rightarrow 20.0$

$\frac{9}{x_3} = 0.3$ auflösen, $x_3 \rightarrow 30.0$

$$x := \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 \\ -0.1 & 0.8 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = (E - A)\cdot\vec{x} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 \\ -0.1 & 0.8 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechnungen

$$\text{Warenflussmatrix} = \begin{pmatrix} \text{"Verflechtung"} & \text{"K"} & \text{"L"} & \text{"M"} & \text{"y"} & \text{"x"} \\ \text{"K"} & 8 & 2 & 9 & 21 & 40 \\ \text{"L"} & 4 & 4 & 3 & 9 & 20 \\ \text{"M"} & 8 & 4 & 6 & 12 & 30 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)
In der nächsten Produktionsperiode ist geplant, dass die Produktion in K doppelt so hoch ist wie in L. Das Unternehmen M soll 30 ME produzieren. Bestimmen Sie, in welchen Grenzen die Produktion in L möglich ist und für welche Produktion in L die Summe der Marktabgaben maximal wird.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_2 \\ x_2 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Bedingung: $\overrightarrow{y_{neu}} = (E - A) \cdot \overrightarrow{x_{neu}}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 \\ -0.1 & 0.8 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot x_2 \\ x_2 \\ 30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.5 \cdot x_2 - 9.0 \\ 0.6 \cdot x_2 - 3.0 \\ -0.6 \cdot x_2 + 24.0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1.5 \cdot x_2 - 9.0 \geq 0 \\ 0.6 \cdot x_2 - 3.0 \geq 0 \\ -0.6 \cdot x_2 + 24.0 \geq 0 \end{pmatrix} \text{auflösen}, x_2 \rightarrow 6.0 \leq x_2 \leq 40.0$$

$$(1.5 \cdot x_2 - 9.0) + (0.6 \cdot x_2 - 3.0) + (-0.6 \cdot x_2 + 24.0) \rightarrow 1.5 \cdot x_2 + 12.0$$

$$s(x_2) := 1.5 \cdot x_2 + 12$$

Der Graph von s ist eine steigende Gerade, das Maximum wird auf dem rechten Rand $x_2 = 40$ angenommen.

Teilaufgabe 2.3 (8 BE)

In der Zukunft soll die Marktabgabe $\vec{y} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 8 \\ 3-t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \leq 3$ betragen.

Berechnen Sie die Produktion des Unternehmens M in Abhängigkeit von t und ermitteln Sie, für welchen Wert von t die Produktion in M minimal wird.

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 \\ -0.1 & 0.8 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 8 \\ 3-t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 & t^2 \\ -0.1 & 0.8 & -0.1 & 8 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 & 3-t \end{pmatrix} \xrightarrow[(III) - 2\cdot(II)]{8\cdot(II) + (I)} \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 & t^2 \\ 0 & 6.3 & -1.1 & t^2 + 64 \\ 0 & -1.8 & 1 & -13 - t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3.5\cdot(III) + (II)]{} \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 & t^2 \\ 0 & 6.3 & -1.1 & t^2 + 64 \\ 0 & 0 & 2.4 & -3.5\cdot t + t^2 + 18.5 \end{pmatrix}$$

$$x_3(t) := \frac{1}{2.4}\cdot\left(-3.5\cdot t + t^2 + 18.5\right)$$

$$x'_3(t) := \frac{1}{2.4}\cdot(2\cdot t - 3.5)$$

$$x'_3(t) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\cdot t - 3.5 = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow 1.75$$

Absolutes Minimum, da der Graph der Funktion eine nach oben offene Parabel ist.