Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2015

- **Physik 12 Technik - Aufgabe III - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Ein Plattenkondensator mit Luft als Dielektrikum wird zunächst an eine Gleichspannungsquelle mit der Spannung $U_0 = 12 \cdot V$ angeschlossen. Die quadratischen Kondensatorplatten besitzen die Länge $l_0 = 10 \cdot cm$ und den Plattenabstand $d_0 = 0.50 \cdot cm$.

Gegeben: $U_0 := 12 \cdot V$ $\quad l_0 := 10 \cdot cm$ $\quad d_0 := 0.50 \cdot cm$ $\quad \varepsilon_r := 1$

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)
Berechnen Sie die Kapazität C_0 des Kondensators.

$$C_0 := \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{l_0^{\,2}}{d_0} \qquad C_0 = 1.8 \times 10^{-11} F$$

Teilaufgabe 1.2.0
Der Kondensator besitzt eine bauliche Besonderheit: Die untere Kondensatorplatte ist ortsfest und die obere kann reibungsfrei parallel zur unteren Platte nach links oder rechts verschoben werden. An der rechten vorderen Ecke der oberen Platte wird die Lage des Punktes P in einem Koordinaten-system betrachtet (siehe Bild 1).

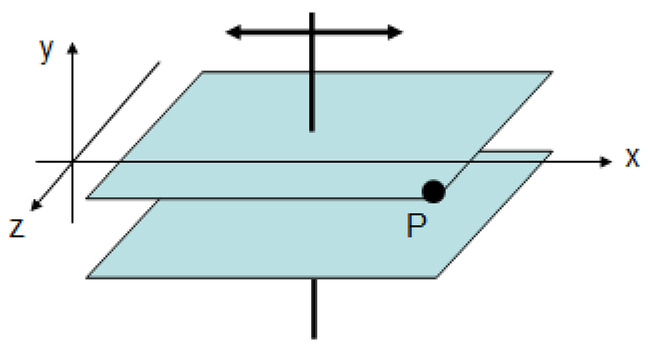


Bild 1

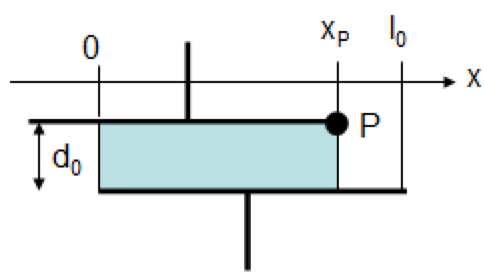


Bild 2

Für die x-Koordinate des Punktes P gilt $5.0 \cdot cm \le x_P \le 10 \cdot cm$. Die y- und z-Koordinate des Punktes P ändern sich bei der Verschiebung nicht.
Das elektrische Feld zwischen beiden Kondensatorplatten beschränkt sich näherungsweise auf den quaderförmigen Raum zwischen den Platten (im Bild 2 schraffiert dargestellt) mit den Abmessungen l_0, x_P und d_0 und wird als homogen betrachtet.
Für $x_P = l_0$ ergibt sich der Kondensator aus 1.0 mit der Kapazität $C_0 = 18 \cdot pF$.

Teilaufgabe 1.2.1 (3 BE)
Zeigen Sie, dass für die Kapazität C dieses Kondensators in Abhängigkeit von x_P gilt:

$$C(x_P) = \frac{C_0}{l_0} \cdot x_P$$

$$C(x_P) = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l_0 \cdot x_P}{d_0} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l_0 \cdot l_0}{d_0} \cdot \frac{x_P}{l_0} = C_0 \cdot \frac{x_P}{l_0} = \frac{C_0}{l_0} \cdot x_P$$

Teilaufgabe 1.2.2 (2 BE)
Berechnen Sie die Kapazität C_1 dieses Kondensators für $x_{P1} := 6.0 \cdot cm$.

$$C_1 := \frac{C_0}{l_0} \cdot x_{P1} \qquad \boxed{C_1 = 1.1 \times 10^{-11} F}$$

Teilaufgabe 1.2.3 (6 BE)
Die obere Platte wird bei angeschlossener Spannungsquelle so verschoben, dass sich die x-Koordinate des Punktes P von $x_{P1} = 6.0 \cdot cm$ auf $x_{P2} = 10 \cdot cm$ ändert. Dabei verrichtet nur die Spannungsquelle Arbeit, wodurch sich der Energieinhalt des elektrischen Feldes um ΔE ändert.
Begründen Sie, warum es zu dieser Energieänderung ΔE kommt und berechnen Sie ΔE

Bei der Verschiebung erhöht sich die Kapazität von C_1 auf C_0. Da dabei die angelegte Spannung U_0 gleich bleibt, fließt wegen $Q = C \cdot U_0$ Ladung von der Spannungsquelle in den Kondensator, wodurch sich dessen gespeicherte Energie erhöht. Diese Energieerhöhung entspricht der durch die Spannungsquelle verrichteten Arbeit.

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} \cdot C_0 \cdot U_0^2 - \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_0^2$$

$$\Delta E := \frac{1}{2} \cdot U_0^2 \cdot (C_0 - C_1) \qquad \boxed{\Delta E = 5.1 \times 10^{-10} J}$$

Teilaufgabe 1.3.0
Wird der in 1.2.0 beschriebene Kondensator mit der Kapazität $C(x_P)$ an einen Sinusgenerator mit der Spannung $U(t) = U_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ aneschlossen, so fließt ein Wechselstrom der Stärke $J(t)$ in den Zuleitungen. Mit einem Amperemeter wird die Effektivstromstärke J_{eff} gemessen.

Teilaufgabe 1.3.1 (5 BE)
Zeigen Sie durch allgemeine Herleitung, dass für die Effektivstromstärke J_{eff} in Abhängigkeit von der Position der oberen Kondensatorplatte (siehe 1.2.0) gilt: $J_{eff} = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \frac{U_{max} \cdot f \cdot C_0}{l_0} \cdot x_P$

$$J_{eff} = \frac{J_{max}}{\sqrt{2}} \qquad J_{max} = \frac{U_{max}}{X_C} \qquad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C(x_P)} \qquad C(x_P) = \frac{C_0}{l_0} \cdot x_P$$

einsetzen:

$$J_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \cdot \omega \cdot C(x_P) = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \cdot \omega \cdot \left(\frac{C_0}{l_0} \cdot x_P\right) = \frac{U_{max} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_0}{\sqrt{2} \cdot l_0} \cdot x_P$$

$$J_{eff} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot U_{max} \cdot f \cdot C_0}{l_0} \cdot x_P$$

Teilaufgabe 1.3.2 (4 BE)
Die Anordnung aus 1.3.0 wird in einer vollautomatischen Maschine zur Positionsbestimmung eines Bohrgestänges verwendet. Die angelegte Wechselspannung mit der Frequenz $f = 10 \cdot kHz$ besitzt den Scheitelwert $U_{max} = 50 \cdot V$. Bei einer bestimmten Lage der oberen Kondensatorplatte misst man die Stromstärke $J_{eff} = 36 \cdot \mu A$.
Ermitteln Sie die zugehörige Koordinate x_{P3} des Punktes P.
Führen Sie eine Einheitenumrechnung durch.

Gegeben: $U_{max} := 50 \cdot V$ $\qquad J_{eff} := 36 \cdot 10^{-6} \cdot A$ $\qquad f := 10 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{s}$

$$J_{eff} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot U_{max} \cdot f \cdot C_0}{l_0} \cdot x_P \quad \Rightarrow \quad x_P := \frac{J_{eff} \cdot l_0}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot U_{max} \cdot f \cdot C_0} \qquad x_P = 9.2 \cdot cm$$

Einheitenumrechnung:

$$[\, x_P \,] = \frac{A \cdot m}{V \cdot \frac{1}{s} \cdot F} = \frac{A \cdot m \cdot s}{V \cdot \frac{A \cdot s}{V}} = m$$

Teilaufgabe 2.0
Rosetta ist eine Raumsonde, die am 2. März 2004 auf den Weg zur Erforschung des Kometen Tschujumow-Gerasimenko geschickt wurde. Diesen hat die Sonde im Jahr 2014 erreicht und ist dort auf eine Umlaufbahn eingeschwenkt. Auf dem Weg zu ihrem Ziel beobachtete die Sonde den Kometen Tempel I sowie die Asteroiden Lutetia und Steins.

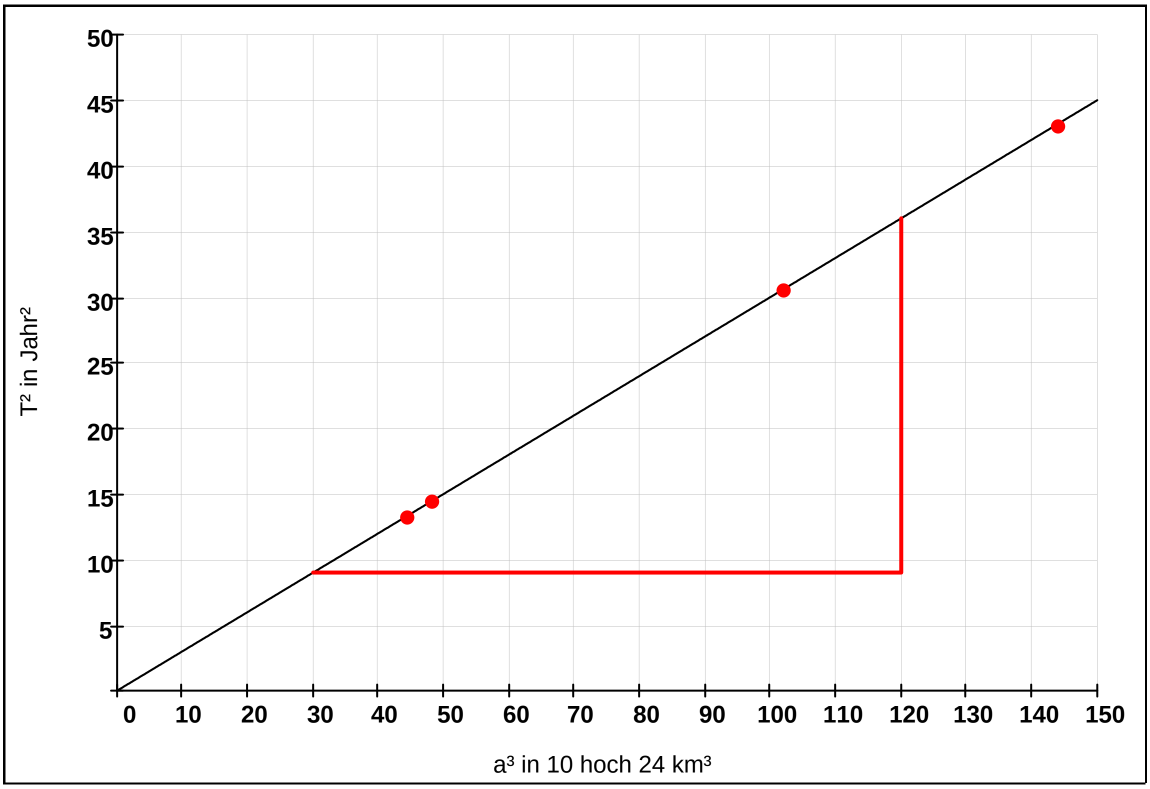
Teilaufgabe 2.1.0
Diese Himmelskörper bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne.
Die folgenden Daten dieser Himmelskörper sind bekannt:

$$\begin{pmatrix} \text{Name} & \text{Steins} & \text{Lutetia} & \text{Tempel I} & \text{Tschurjumow} - \text{Gerasimenko} \\ \dfrac{T}{\text{Jahren}} & 3.63 & 3.80 & 5.52 & 6.56 \\ \dfrac{a}{10^6 \cdot \text{km}} & 354 & 364 & 467 & 524 \end{pmatrix}$$

T ist die Umlaufdauer und a die große Halbachse der jeweiligen Bahnellipse der Himmelskörper.

Teilaufgabe 2.1.1 (5 BE)
Bestätigen Sie das dritte Kepler'sche Gesetz mithilfe dieser Daten durch eine graphische Auswertung.
Verwenden Sie dabei den folgenden Maßstab:
$10 \cdot 10^{24} \cdot \text{km}^3$ entspricht $1 \cdot \text{cm}$; $5 \cdot \text{Jahre}^2$ entspricht $1 \cdot \text{cm}$;

$$\begin{pmatrix} \text{"Name"} & \text{"Steins"} & \text{"Lutetia"} & \text{"Tempel 1"} & \text{"Tschurjumow-Gerasimenko"} \\ \dfrac{T^2}{\text{Jahren}^2} & 13.2 & 14.4 & 30.5 & 43.0 \\ \dfrac{a^3}{10^{24} \cdot \text{km}^3} & 44.4 & 48.2 & 102 & 144 \end{pmatrix}$$



Im Rahmen der Mess- und Zeichengenauigkeit liegen die zu den Messwerten gehörenden Punkte im a^3-T^2-Diagramm auf einer Ursprungsgeraden.

$\Rightarrow \quad T^2 \sim a^3$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{T^2}{a^3} = k$ mit einer Konstanten k.

Teilaufgabe 2.1.2 **(3 BE)**
Ermitteln Sie aus dem Diagramm von 2.1.1 die Keplerkonstante C_S für die Sonne als Zentralgestirn.

$$k := \frac{36 \cdot \text{Jahr}^2 - 9 \cdot \text{Jahr}^2}{120 \cdot 10^{24} \cdot \text{km}^3 - 30 \cdot 10^{24} \cdot \text{km}^3} \qquad k = 3.00 \cdot 10^{-25} \cdot \frac{\text{Jahr}^2}{\text{km}^3}$$

Keplerkonstante: $\boxed{C_S := 3.0 \cdot 10^{-25} \cdot \frac{\text{Jahr}^2}{\text{km}^3}}$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Bestätigen Sie durch allgemeine Herleitung die Gültigkeit des dritten Kepler'schen Gesetzes für Himmelskörper, die sich antriebslos auf einer Kreisbahn mit dem Radius R um einen Zentralkörper bewegen.

Die Gravitationskraft $\overrightarrow{F_{Grav}}$, die der Zentralkörper der Masse m_Z auf einen umlaufenden Körper der Masse m_K ausübt, ist die für die Kreisbewegung notwendige Zentralkraft $\overrightarrow{F_Z}$. Für die Beträge gilt:

$$F_Z = F_{Grav} \quad \Leftrightarrow \quad m_K \cdot \omega^2 \cdot R = \frac{G \cdot m_K \cdot m_Z}{R^2} \quad \Leftrightarrow \quad m_K \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot R = \frac{G \cdot m_K \cdot m_Z}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot m_Z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T^2}{R^3} = C$$ mit einer Konstanten C.

Teilaufgabe 2.3.0
Nachdem Rosetta den Zielkometen erreicht hat, umkreist sie ihn in einer Entfernung von $r = 25 \cdot km$ von dessen Schwerpunkt, um den Kometen eingehend zu kartieren. Die Masse des Kometen beträgt $m_K = 3.1 \cdot 10^{12} \cdot kg$.
T ist die Zeitdauer für einen antriebslosen Umlauf der Sonde um Tschurjumow-Gerasimenko in dieser Entferung und v der Betrag der zugehörigen Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$.

Teilaufgabe 2.3.1 (5 BE)
Berechnen Sie T und v.

Gegeben: $r := 25 \cdot 10^3 \cdot m$ $\quad m_K := 3.1 \cdot 10^{12} \cdot kg$ $\quad G := 6.67384 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot m_Z} \cdot R^3$$

mit $m_Z = m_K$ und $R = r$ gilt: $T := \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot m_K} \cdot r^3}$

$T = 1.7 \times 10^6\, s$ bzw. $T = 20 \cdot Tag$

$v := \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r$ $\quad v = 0.091 \frac{m}{s}$

Teilaufgabe 2.3.2 (3 BE)
Der Betrag der Bahngeschwindigkeit von Rosetta ändert sich auf dieser Kreisbahn nicht.
Trotzdem spricht man bei dieser Kreisbewegung von einer beschleunigten Bewegung.
Erläutern Sie diesen Widerspruch.

Bei der Bewegung auf der Kreisbahn ändert sich zwar nicht der Betrag der Geschwindigkeit $\vec{v}$, jedoch ständig ihre Richtung. $\vec{v}$ ist in jedem Bahnpunkt tngential zur Kreisbahn gerichtet. Für diese fortwährende Richtungsänderung ist eine resultierende Kraft, die Zentripetalkraft (hier Gravitationskraft zwischen Sonde und Komet) verantwortlich. Diese resultierende Kraft bewirkt nach dem Grundgesetz der Mechanik eine beschleunigte Bewegung.

Teilaufgabe 2.4.0
Rosetta hat einen Lander mit dem Namen Philae an Bord. Dieser verlässt später Rosetta, um auf dem Kometen der Masse $m_K = 3.1 \cdot 10^{12} \cdot kg$ zu landen und dort weitere Untersuchungen durchzuführen. Der Lander besitzt die Masse $m_P = 100 \cdot kg$. Bei den folgenden Betrachtungen kann die Masse des Landers als konstant angesehen werden. Der Komet wird in einer einfachen Näherung hierbei als Kugel mit dem Radius $r_K = 2 \cdot km$ betrachtet.

Gegeben: $m_K := 3.1 \cdot 10^{12} \cdot kg$ $\quad m_P := 100 \cdot kg$ $\quad r_K := 2 \cdot 10^3 \cdot m$

Teilaufgabe 2.4.1 (4 BE)
Berechnen Sie den Betrag F_G der Gewichtskraft $\vec{F_G}$ des Landers am Landeplatz und ermitteln Sie die Masse m_V eines Vergleichskörpers, dessen Gewichtskraft auf der Erdoberfläche ebenfalls F_G beträgt.

Die Gewichtskraft $\vec{F_G}$ des Landers auf dem Kometen ist die Gravitationskraft $\vec{F_{Grav}}$ zwischen diesen beiden Körpern. Für die Beträge gilt:

$$F_G = F_{Grav} \qquad F_G := \frac{G \cdot m_P \cdot m_K}{r_K^2} \qquad F_G = 5.2 \times 10^{-3} N$$

$$F_G = m_V \cdot g \quad \Rightarrow \quad m_V := \frac{F_G}{g} \qquad m_V = 5.3 \times 10^{-4} kg$$

Teilaufgabe 2.4.2 (4 BE)
Der Lander nähert sich dem Kometen senkrecht zur Oberfläche. Kurz vor dem Aufprall besitzt er die Geschwindigkeit $\vec{v_1}$ mit dem Betrag $v_1 = 1.4 \cdot \frac{m}{s}$. Durch ein kleines Triebwerk soll er auf die Landegeschwindigkeit $\vec{v_2}$ abgebremst werden. dazu bewirkt dieses Triebwerk über einen Zeitraum von 5,0 Sekunden eine Schubkraft $\vec{F_S}$ auf en Lander entgegen der Bewegungsrichtung mit dem Betrag $F_S = 6.0 \cdot N$.

Berechnen Sie den Betrag v_2 der Landegeschwindigkeit $\vec{v_2}$.

Gegeben: $v_1 := 1.4 \cdot \frac{m}{s}$ $\Delta t := 5.0 \cdot s$ $F_S := 6.0 \cdot N$

Resultierende Kraft: $\vec{F} = \vec{F_G} + \vec{F_S}$

Nach 2.4.1 kann $\vec{F_G}$ gegenüber $\vec{F_S}$ vernachlässigt werden.

$$F \cdot \Delta t = m_P \cdot |\Delta v|$$

$$|\Delta v| = v_1 - v_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = v_1 - |\Delta v|$$

$$v_2 := v_1 - \frac{F_S \cdot \Delta t}{m_P} \qquad v_2 = 1.1 \frac{m}{s}$$