Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2005

- **Mathematik 13 Technik - A II - Aufgabentext**

Teilaufgabe 1

Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen f_k mit $k \in IR^+$ und der Definitionsmenge

$D_{f_k} =]-k\,;\,k[$ durch $f_k(x) = \dfrac{2\cdot|x|}{\sqrt{k^2 - x^2}}$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Geben Sie die Nullstelle von f_k an und bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f_k.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_k(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten der Graphen von f_k an.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph von f_k streng monoton steigt bzw. fällt.

Bestimmen Sie dann die Art und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f_k .

[Teilergebnis: $f'_k(x) = 2\cdot k^2\cdot\left(k^2 - x^2\right)^{-1.5}$ für $x > 0$]

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung der bisher gefundenen Ergebnisse den Graphen von f_3 sowie seine Asymptoten in ein Koordinatensystem ($1\cdot LE = 2\cdot cm$).

Berechnen Sie dazu die Funktionswerte zu den Abszissenwerten ± 1, ± 2, ± 2.5.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Im ersten Quadranten wird vom Graphen der Funktion f_k, der zugehörigen Asymptote und der x-Achse eine Fläche begrenzt.

Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts in Abhängigkeit von k.

Teilaufgabe 1.5 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion F_k mit $F_k(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f_k(t)\,dt$ mit $k > 1$ und $x \in [\,-k\,;\,k\,]$.

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von F_k sowie das Krümmungsverhalten des Graphen von F_k.

Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind die reellen Funktionen h_a mit $h_a(x) = \dfrac{(x-5)\cdot|x+1|\cdot(x-a)}{x^2 - 2\cdot x - 15}$ mit $a \in IR$ und der in IR maximalen Definitionsmenge D_{h_a} .

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Bestimmen Sie D_{h_a} und die Art der Definitionslücken in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 2.2.0

Gegeben sind weiter die reellen Funktionen g_a mit $g_a(x) = \arctan\left[\frac{|x+1|\cdot(x-a)}{x+3}\right]$

mit $D_{g_a} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Teilaufgabe 2.2.1 (7 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von g_a und das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ und $x \to -3$ in Abhängigkeit von a für $a \geq -3$.

Teilaufgabe 2.2.2 (10 BE)

Begründen Sie, dass g_5 an der Stelle $x_0 = -1$ stetig ist, und ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von g_5.

[Teilergebnis: $g'_5(x) = \dfrac{x^2 + 6\cdot x - 7}{(x+3)^2 + \left(x^2 - 4\cdot x - 5\right)^2}$ für $x > -1$]

Teilaufgabe 3 (5 BE)

Ein Metallstück ist auf der Drehbank so bearbeitet worden, dass danach sein Profil durch die Terme $p(x) = x\cdot e^{2-x}$ und $q(x) = -x\cdot e^{2-x}$, $x \in \mathbb{R}$ beschrieben wird. Die Rotationsachse ist die x-Achse. Das Metallstück wird anschließend bei $x = 1$ und bei $x = 3$ senkrecht zur Rotationsachse abgeschnitten. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens dieses Rotationskörpers auf zwei Nachkommastellen genau.

Teilaufgabe 4 (8 BE)

Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $y' - y\cdot\left(\frac{2\cdot x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{-2}{x^2+1}$ mit $x > 0$

die allgemeine Lösung mit der Methode der Variation der Konstanten.