Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2005

- ## Mathematik 13 Technik - A II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1

Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen f_k mit $k \in IR^+$ und der Definitionsmenge

$D_{f_k} = \,]-k\,;\,k[$ durch $f_k(x) = \dfrac{2\cdot|x|}{\sqrt{k^2 - x^2}}$.

Teilaufgabe 1.1 **(5 BE)**

Geben Sie die Nullstelle von f_k an und bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f_k. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_k(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten der Graphen von f_k an.

$$f_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 0$$

$$f_k(-x) = \frac{2\cdot|-x|}{\sqrt{k^2 - (-x)^2}} = \frac{2\cdot|x|}{\sqrt{k^2 - x^2}} = f_k(x) \quad \Leftrightarrow$$

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$$\lim_{x \to -k^+} \frac{2\cdot|x|}{\sqrt{k^2 - x^2}} \;\text{annehmen}, k > 0 \;\to \infty$$

$$\lim_{x \to k^-} \frac{2\cdot|x|}{\sqrt{k^2 - x^2}} \;\text{annehmen}, k > 0 \;\to \infty$$

Senkrechte Asymptoten: A_1: $x = -k$ A_2: $x = k$

Teilaufgabe 1.2 **(6 BE)**

Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph von f_k streng monoton steigt bzw. fällt. Bestimmen Sie dann die Art und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f_k .

[Teilergebnis: $f'_k(x) = 2\cdot k^2\cdot\left(k^2 - x^2\right)^{-1.5}$ für $x > 0$]

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{2\cdot x}{\sqrt{k^2 - x^2}} & \text{if } 0 \le x < k \\ \dfrac{-2\cdot x}{\sqrt{k^2 - x^2}} & \text{if } -k < x < 0 \end{cases}$$

Für $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

$$f'_k(x) = \frac{\left(2\cdot\sqrt{k^2 - x^2}\right) - 2\cdot x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(k^2 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot(-2\cdot x)}{k^2 - x^2} = \frac{2\cdot\left(k^2 - x^2\right) + 2\cdot x^2}{\left(k^2 - x^2\right)\cdot\sqrt{k^2 - x^2}} = \frac{2\cdot k^2}{\left(k^2 - x^2\right)^{1.5}}$$

$$f'_k(x) = \begin{cases} \dfrac{2\cdot k^2}{\left(k^2 - x^2\right)^{1.5}} & \text{if } 0 < x < k \\ \dfrac{-2\cdot k^2}{\left(k^2 - x^2\right)^{1.5}} & \text{if } -k < x < 0 \end{cases}$$

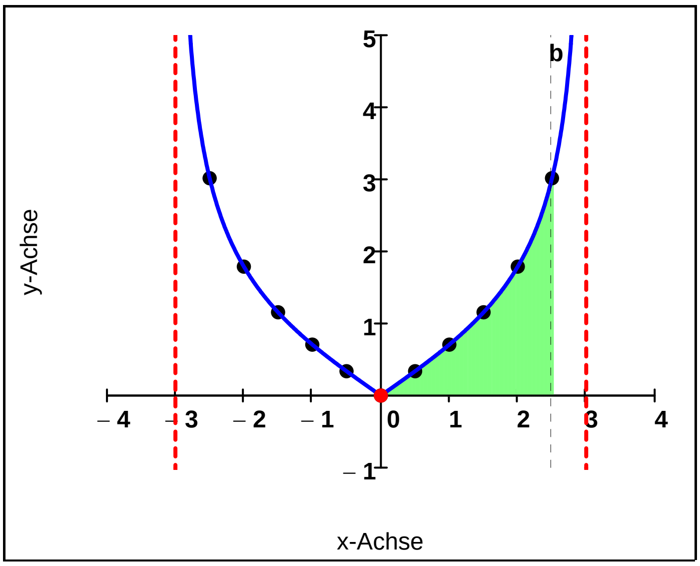
Da $\mathbf{f_k}$ stetig ist in $\mathbf{D_{f_k}}$ gilt:

$\mathbf{G_{f_k}}$ ist streng monoton fallend für $\mathbf{x} \in \left]\, -\mathbf{k}\, ;\ \mathbf{0}\, \right]$ und streng monoton steigend für $\mathbf{x} \in \left[\ \mathbf{0}\ ;\ \mathbf{k}\, \right[$.

Lokaler und globaler Tiefpunkt **T(0/0)**.

Teilaufgabe 1.3 **(4 BE)**
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisher gefundenen Ergebnisse den Graphen von f_3 sowie seine Asymptoten in ein Koordinatensystem ($\mathbf{1\cdot LE = 2\cdot cm}$).
Berechnen Sie dazu die Funktionswerte zu den Abszissenwerten $\pm\mathbf{1}$, $\pm\mathbf{2}$, $\pm\mathbf{2.5}$.

$$f(x) := \frac{2\cdot|x|}{\sqrt{3^2 - x^2}}$$



x_d =	$f(x_d)$ =
-2.5	3
-2	1.8
-1.5	1.2
-1	0.7
-0.5	0.3
0	0
0.5	0.3
1	0.7
1.5	1.2
2	1.8
2.5	3

Teilaufgabe 1.4 **(5 BE)**
Im ersten Quadranten wird vom Graphen der Funktion f_k, der zugehörigen Asymptote und der x-Achse eine Fläche begrenzt.
Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts in Abhängigkeit von k.

Flächenmaßzahl: $$A(k) = \lim_{b \to k^-} \int_0^b \frac{2 \cdot x}{\sqrt{k^2 - x^2}}\, dx$$

Bestimmung der Stammfunktion:

Substitution: $z = k^2 - x^2$ $\qquad \dfrac{dz}{dx} = -2 \cdot x$ $\qquad dx = \dfrac{dz}{-2 \cdot x}$

$$\int \frac{2 \cdot x}{\sqrt{k^2 - x^2}}\, dx = \int \frac{-1}{\sqrt{z}}\, dz = \frac{-1}{\frac{-1}{2} + 1} \cdot z^{\frac{-1}{2}+1} = -2 \cdot \sqrt{z} = -2 \cdot \sqrt{k^2 - x^2}$$

$$A(k) = \lim_{b \to k^-} \left[-2 \cdot \sqrt{k^2 - b^2} - \left(-2 \cdot \sqrt{k^2 - 0^2}\right)\right] = 2 \cdot \sqrt{k^2} = 2 \cdot k$$

Teilaufgabe 1.5 **(5 BE)**
Gegeben ist die Funktion F_k mit $F_k(x) = \int_{-1}^{x} f_k(t)\, dt$ mit $k > 1$ und $x \in [\, -k\,;\ k\,]$.
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von F_k sowie das Krümmungsverhalten des Graphen von F_k.

$F_k(-1) = \int_{-1}^{-1} f_k(t)\, dt = 0$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ es gibt eine Nullstelle: $\qquad x_1 = -1$

$F'_k(x) = f_k(x)$

$f_k(x) > 0$ für alle $x \in \,]\, -k\,; k\,[\, \setminus \{0\}$

$f_k(x)$ ist stetig für alle $x \in \,]\, -k\,;\ k\,[$

$\Rightarrow \qquad G_{f_k}$ ist streng monoton steigend in $x \in [\, -k\,;\ k\,]$

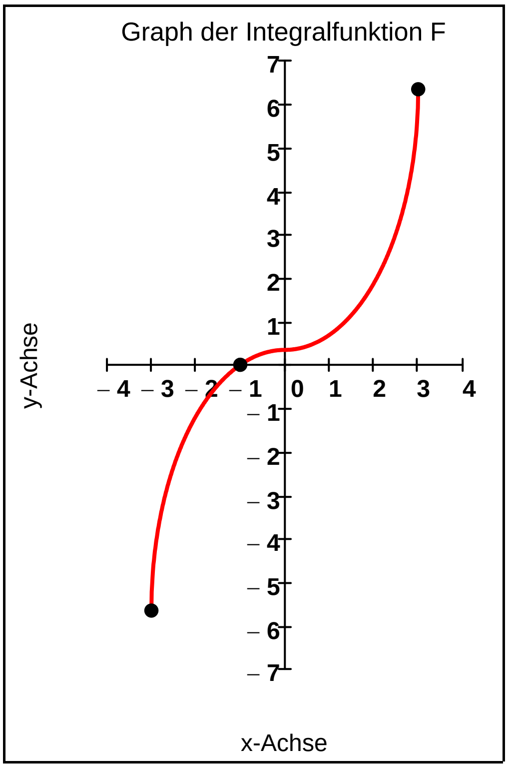
$\Rightarrow \qquad$ es gibt genau eine Nullstelle $x_1 = -1$ von F_k

$F''_k(x) = f'_k(x)$

$f'_k(x) < 0$ für $x \in]-k\,;\,0] \Rightarrow G_{f_k}$ ist rechtsgekrümmt in $x \in]-k\,;\,0]$.

$f'_k(x) > 0$ für $x \in [0\,;\,k[\Rightarrow G_{f_k}$ ist linksgekrümmt in $x \in [0\,;\,k[$.

Graphische Darstellung (in der Prüfung nicht verlangt):



$k := 3$

$$F(x) := \int_{-1}^{x} \frac{2\cdot|t|}{\sqrt{k^2 - t^2}}\,dt$$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind die reellen Funktionen h_a mit $h_a(x) = \dfrac{(x-5)\cdot|x+1|\cdot(x-a)}{x^2 - 2\cdot x - 15}$ mit $a \in IR$ und der in IR maximalen Definitionsmenge D_{h_a}.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Bestimmen Sie D_{h_a} und die Art der Definitionslücken in Abhängigkeit von a.

Nullstellen des Nenners:

$x^2 - 2\cdot x - 15 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D_{f_k} = IR \setminus \{-3\,;\,5\}$

$$h_a(x) = \frac{(x-5)\cdot|x+1|\cdot(x-a)}{(x+3)\cdot(x-5)}$$

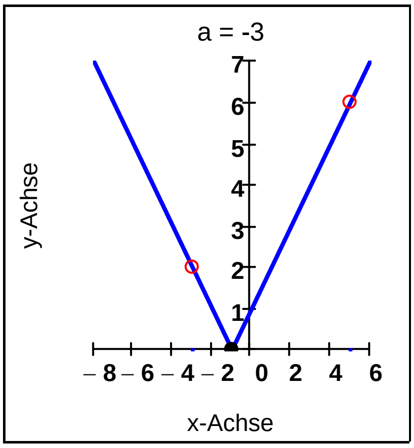
Für alle $a \in \mathrm{IR}$ ist $x = 5$ stetig behebbare Definitionslücke.

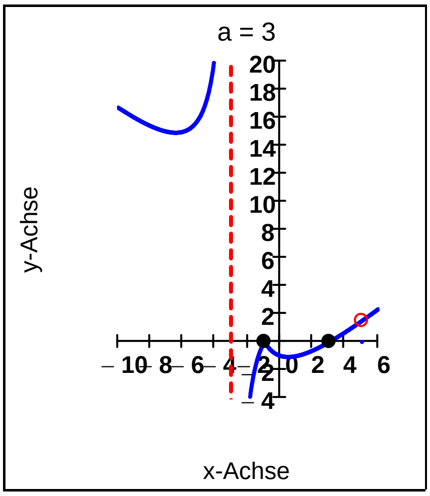
Für $a = -3$ ist $x = -3$ stetig behebbare Definitionslücke.

Für $a \neq -3$ ist $x = 5$ stetig behebbare Definitionslücke und $x = -3$ Polstelle mit VZW.

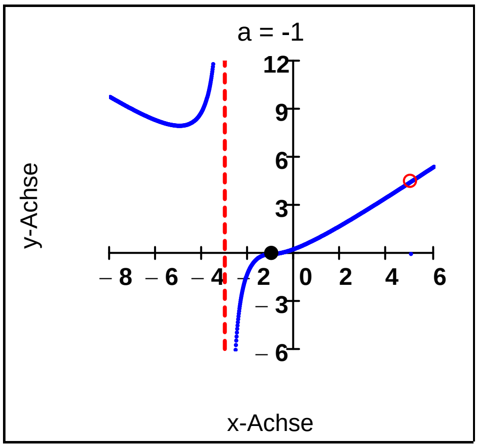
$$h(x,a) := \frac{(x-5)\cdot|x+1|\cdot(x-a)}{(x+3)\cdot(x-5)}$$

$$h(x,-3) = |x+1| \qquad h(x,3) = \frac{|x+1|\cdot(x-3)}{x+3}$$





$$h(x,-1) = \frac{|x+1|\cdot(x+1)}{x+3}$$



Teilaufgabe 2.2.0

Gegeben sind weiter die reellen Funktionen g_a mit $g_a(x) = \arctan\left[\frac{|x+1|\cdot(x-a)}{x+3}\right]$

mit $D_{g_a} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Teilaufgabe 2.2.1 **(7 BE)**

Bestimmen Sie die Nullstellen von g_a und das Verhalten der Funktionswerte für $x \rightarrow \pm\infty$ und $x \rightarrow -3$ in Abhängigkeit von a für $a \geq -3$.

$$g_a(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{|x+1|\cdot(x-a)}{x+3} = 0$$

Für $a = -3$ ist $x_0 = -1$ eine Nullstelle.

Für $a = -1$ ist $x_0 = -1$ eine Nullstelle.

Für $a \neq -3 \wedge a \neq -1$ ist $x_1 = -1$ eine Nullstelle und $x_2 = a$ eine Nullstelle.

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan\left[\frac{|x+1|\cdot(x-a)}{x+3}\right] \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \arctan\left[\frac{|x+1|\cdot(x-a)}{x+3}\right] \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$a > -3$

$$\lim_{x \to -3^-} \arctan\left[\frac{|x+1|\cdot(x-a)}{x+3}\right] \text{ annehmen}, a > -3 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -3^+} \arctan\left[\frac{|x+1|\cdot(x-a)}{x+3}\right] \text{ annehmen}, a > -3 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$a = -3$

$$\lim_{x \to -3^-} \arctan(|x+1|) \rightarrow \operatorname{atan}(2)$$

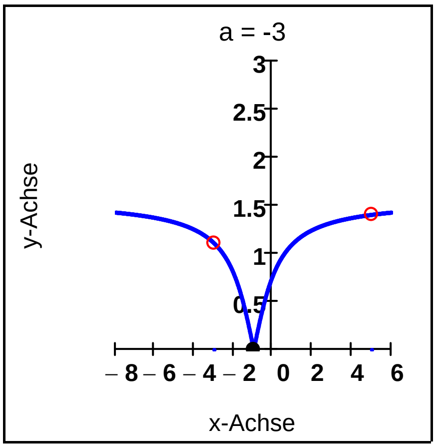
$$\lim_{x \to -3^+} \arctan(|x+1|) \rightarrow \operatorname{atan}(2)$$

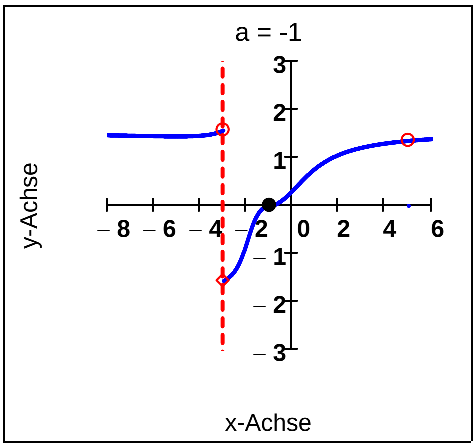
Graphische Darstellung (in der Prüfung nicht verlangt):

$$\mathbf{g(x,a) := arctan\left[\frac{(x-5)\cdot|x+1|\cdot(x-a)}{(x+3)\cdot(x-5)}\right]}$$

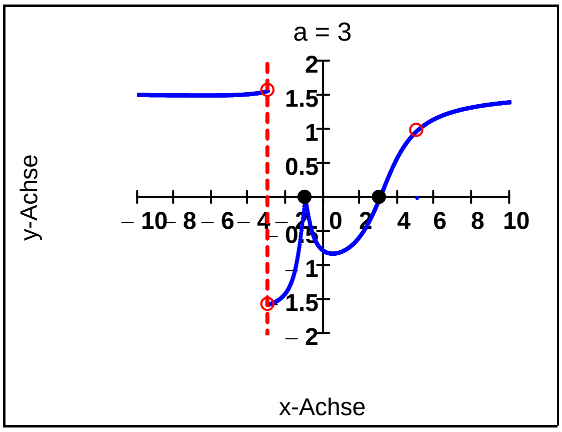
$$\mathbf{g(x,-3)\ =\ atan(|x+1|)}$$

$$\mathbf{g(x,-1)\ vereinfachen\ =\ atan\left[\frac{|x+1|\cdot(x+1)}{x+3}\right]}$$





$$\mathbf{g(x,3)\ vereinfachen\ =\ atan\left[\frac{|x+1|\cdot(x-3)}{x+3}\right]}$$



Teilaufgabe 2.2.2 (10 BE)
Begründen Sie, dass g_5 an der Stelle $x_0 = -1$ stetig ist, und ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von g_5.

[Teilergebnis: $g'_5(x) = \dfrac{x^2 + 6\cdot x - 7}{(x+3)^2 + \left(x^2 - 4\cdot x - 5\right)^2}$ für $x > -1$]

$$g(x,5) = \operatorname{atan}\left[\frac{|x+1|\cdot(x-5)}{x+3}\right]$$

1.Fall: $x + 1 > 0$ auflösen, $x \rightarrow -1 < x$ $\Rightarrow$ $g_1(x) := \operatorname{atan}\left[\dfrac{(x+1)\cdot(x-5)}{x+3}\right]$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to -1^+} \operatorname{atan}\left[\frac{-(x+1)\cdot(x-5)}{x+3}\right] \rightarrow 0$$

2.Fall: $x + 1 < 0$ auflösen, $x \rightarrow x < -1$ $\Rightarrow$ $g_2(x) := \operatorname{atan}\left[\dfrac{-(x+1)\cdot(x-5)}{x+3}\right]$

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \to -1^-} \operatorname{atan}\left[\frac{-(x+1)\cdot(x-5)}{x+3}\right] \rightarrow 0$$

Funktionswert: $g(-1,5) = 0$

Das heißt: G_g ist stetig an $x_0 = -1$

$x > -1$

$$g'_1(x) := \frac{d}{dx}g_1(x) = \frac{\dfrac{x+1}{x+3} + \dfrac{x-5}{x+3} - \dfrac{(x+1)\cdot(x-5)}{(x+3)^2}}{\dfrac{(x+1)^2\cdot(x-5)^2}{(x+3)^2} + 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+7)}{x^4 - 8\cdot x^3 + 7\cdot x^2 + 46\cdot x + 34}$$

$(x+1)^2\cdot(x-5)^2 + (x+3)^2$ vereinfachen $\rightarrow x^4 - 8\cdot x^3 + 7\cdot x^2 + 46\cdot x + 34$

Der Nenner ist als Summe zweier Quadrate positiv.

$(x-1)\cdot(x+7) \geq 0 \wedge x > -1$ auflösen, $x \rightarrow 1 \leq x$

$(x-1)\cdot(x+7) \leq 0 \wedge x > -1$ auflösen, $x \rightarrow -1 < x \leq 1$

G_f ist streng monoton fallend für $x \in [\,-1\,;\,1\,]$ und streng monoton steigend für $x \in [\,1\,;\,\infty\,[$.

$x < -1$

$$g'_2(x) := \frac{d}{dx} g_2(x) = -\frac{\frac{x+1}{x+3} + \frac{x-5}{x+3} - \frac{(x+1)\cdot(x-5)}{(x+3)^2}}{\frac{(x+1)^2\cdot(x-5)^2}{(x+3)^2} + 1} = -\frac{(x-1)\cdot(x+7)}{x^4 - 8\cdot x^3 + 7\cdot x^2 + 46\cdot x + 34}$$

$$(x+1)^2\cdot(x-5)^2 + (x+3)^2 \text{ vereinfachen } \rightarrow x^4 - 8\cdot x^3 + 7\cdot x^2 + 46\cdot x + 34$$

Der Nenner ist als Summe zweier Quadrate positiv.

$$-(x-1)\cdot(x+7) \ge 0 \wedge x < -1 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow -7 \le x < -1$$

$$-(x-1)\cdot(x+7) \le 0 \wedge x < -1 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow x \le -7$$

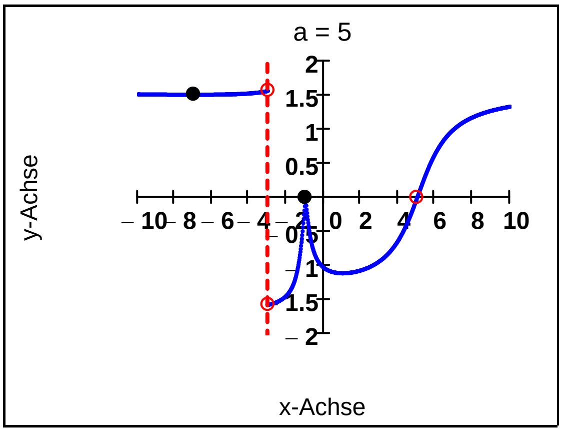
G_f ist streng monoton fallend für $x \in]-\infty\,;\,-7]$, streng monoton steigend für $x \in [-7\,;\,-3[$ und streng monton steigend für $]-3\,;\,-1]$

Der Graph von g_5 besitzt bei $x_1 = -7$ einen Tiefpunkt T_1, bei $x_2 = -1$ einen Hochpunkt H und bei $x_3 = 1$ einen Tiefpunkt T_2.

$T_1\,(-7\,/\,\arctan(18))$ $\qquad$ $H\,(-1\,/\,0)$ $\qquad$ $T_2\,(1\,/\,-\arctan(2))$

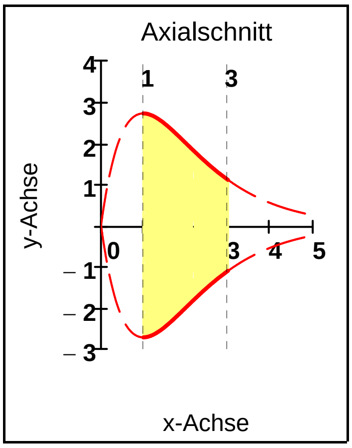
Graphische Darstellung (in der Prüfung nicht verlangt):

$$g(x,5) \text{ vereinfachen } = \operatorname{atan}\left[\frac{|x+1|\cdot(x-5)}{x+3}\right]$$



Teilaufgabe 3 (5 BE)
Ein Metallstück ist auf der Drehbank so bearbeitet worden, dass danach sein Profil durch die Terme $p(x) = x \cdot e^{2-x}$ und $q(x) = -x \cdot e^{2-x}$, $x \in \mathbb{R}$ beschrieben wird. Die Rotationsachse ist die x-Achse. Das Metallstück wird anschließend bei $x = 1$ und bei $x = 3$ senkrecht zur Rotationsachse abgeschnitten. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens dieses Rotationskörpers auf zwei Nachkommastellen genau.

$p(x) := x \cdot e^{2-x}$ $\qquad$ $q(x) := -x \cdot e^{2-x}$



Volumenmaßzahl V:

$$V = \pi \cdot \int_1^3 (p(x))^2 \, dx$$

Stammfunktion J bestimmen:

$$J(x) = \int \left(x \cdot e^{2-x}\right)^2 dx = \int x^2 \cdot e^{4-2\cdot x} \, dx$$

1. Partielle Integration:

$u(x) = x^2$ $\qquad$ $u'(x) = 2 \cdot x$

$v'(x) := e^{4-2\cdot x}$ $\qquad$ $v(x) = \frac{-1}{2} \cdot e^{4-2\cdot x}$

$$J(x) = \frac{-1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{4-2\cdot x} + \int x \cdot e^{4-2\cdot x} \, dx$$

2. Partielle Integration:

$u(x) = x$ $\qquad$ $u'(x) = 1$

$v'(x) := e^{4-2\cdot x}$ $\qquad$ $v(x) = \frac{-1}{2} \cdot e^{4-2\cdot x}$

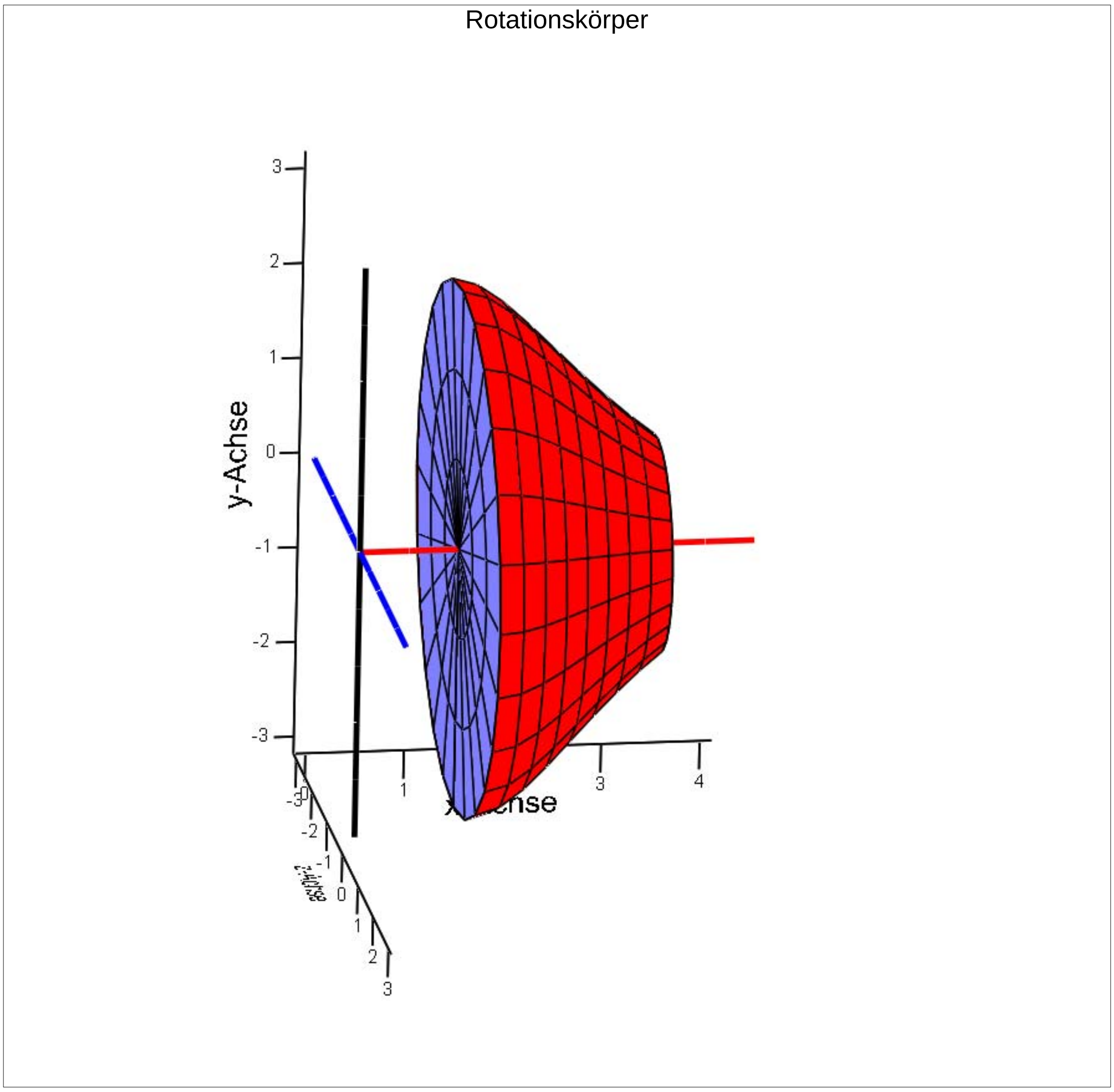
$$J(x) = \frac{-1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{4-2\cdot x} - \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{4-2\cdot x} + \int \frac{1}{2} \cdot e^{4-2\cdot x}\, dx$$

$$J(x) = \frac{-1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{4-2\cdot x} - \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{4-2\cdot x} - \frac{1}{4} \cdot e^{4-2\cdot x}$$

$$J(x) := \frac{-1}{4} \cdot e^{4-2\cdot x} \cdot \left(2\cdot x^2 + 2\cdot x + 1\right)$$

$$V := \pi \cdot (J(3) - J(1)) \qquad V = \pi \cdot \left(\frac{5\cdot e^2}{4} - \frac{25\cdot e^{-2}}{4}\right) = 26.36$$

Definitionen



Teilaufgabe 4 (8 BE)

Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $y' - y \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{x^2+1} - \frac{1}{x} \right) = \frac{-2}{x^2+1}$ mit $x > 0$

die allgemeine Lösung mit der Methode der Variation der Konstanten.

Homogene DGL: $y' - y \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{x^2+1} - \frac{1}{x} \right) = 0$

Umformung: $y' = y \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{x^2+1} - \frac{1}{x} \right)$

Triviale Lösung: $y = 0$

Verwendung Differentialoperator: $\frac{dy}{dx} = y \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{x^2+1} - \frac{1}{x} \right)$

Trennen der Variablen: $\frac{dy}{y} = \left(\frac{2 \cdot x}{x^2+1} - \frac{1}{x} \right) \cdot dx$ mit $y \neq 0 \wedge x > 0$

Integration: $\int \frac{1}{y} \, dy = \int \left(\frac{2 \cdot x}{x^2+1} - \frac{1}{x} \right) dx + k \rightarrow \ln(|y|) = \ln\left(x^2+1\right) - \ln(x) + 3$

Umformung: $\ln(|y|) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x} \right) + k$

Delogarithmieren: $|y| = e^{\ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)+k} = e^k \cdot \frac{x^2+1}{x}$

$y > 0$ $\quad y = K_1 \cdot \frac{x^2+1}{x}$ $\quad$ mit $K_1 = e^k \wedge K_1 > 0$

$y < 0$ $\quad y = K_2 \cdot \frac{x^2+1}{x}$ $\quad$ mit $K_2 = -e^k \wedge K_2 < 0$

Mit trivialer Lösung: $y = K \cdot \frac{x^2+1}{x}$ $\quad$ mit $K \in IR$.

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_H(x) = K \cdot \frac{x^2+1}{x}$

Variation der Konstanten: $y = K(x)\cdot\frac{x^2+1}{x}$

Ableitungsfunktion: $y' = K'(x)\cdot\frac{x^2+1}{x} + K(x)\cdot\frac{2\cdot x\cdot x - \left(x^2+1\right)\cdot 1}{x^2}$

Vereinfachen: $y' = K'(x)\cdot\frac{x^2+1}{x} + K(x)\cdot\frac{x^2-1}{x^2}$

Einsetzen in inhomogene DGL: $y' - y\cdot\left(\frac{2\cdot x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{-2}{x^2+1}$

$$K'(x)\cdot\frac{x^2+1}{x} + K(x)\cdot\frac{x^2-1}{x^2} - K(x)\cdot\frac{x^2+1}{x}\cdot\left[\frac{2\cdot x^2 - x^2 - 1}{x\cdot\left(x^2+1\right)}\right] = \frac{-2}{x^2+1}$$

Vereinfachen:

$$K'(x)\cdot\frac{x^2+1}{x} + K(x)\cdot\frac{x^2-1}{x^2} - K(x)\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{-2}{x^2+1}$$

$$K'(x)\cdot\frac{x^2+1}{x} = \frac{-2}{x^2+1}$$

Auflösen: $K'(x) = \frac{-2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}$

Integrieren: $K(x) = \int \frac{-2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$

Substitution: $z = x^2+1$ $\qquad \frac{dz}{dx} = 2\cdot x$ $\qquad dx = \frac{dz}{2\cdot x}$

$$\int \frac{-2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = \int \frac{-1}{z^2}\,dz = \frac{-1}{-2+1}\cdot z^{-2+1} = \frac{1}{z}$$

Resubstitution: $\mathbf{K(x) = \dfrac{1}{x^2+1}}$

Spezielle Lösung des inhomogenen Systems:

$$\mathbf{y_P(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{x}}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$\mathbf{y_A(x) = K \cdot \frac{x^2+1}{x} + \frac{1}{x}} \qquad \text{mit } \mathbf{K \in IR}$$

Graphische Darstellung (in der Prüfung nicht verlangt):

Kurvenschar: $\mathbf{y_H(x,K) := K \cdot \dfrac{x^2+1}{x}}$ $\qquad$ $\mathbf{y_A(x,K) := K \cdot \dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{1}{x}}$

Scharkurven der allgemeinen Lösung der homogenen DGL:

Scharkurven der allgemeinen Lösung der inhomogenen DGL: